Version 230216

2022/2023

Convexité

I Notion de dérivée seconde

Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I et dont la fonction dérivée f' est également dérivable sur I.
On appelle dérivée seconde, la fonction dérivée de f' et on la note f''.

Exemple

Calculer la fonction dérivée seconde des fonction suivantes après avoir donné leur domaine de dérivabilité :

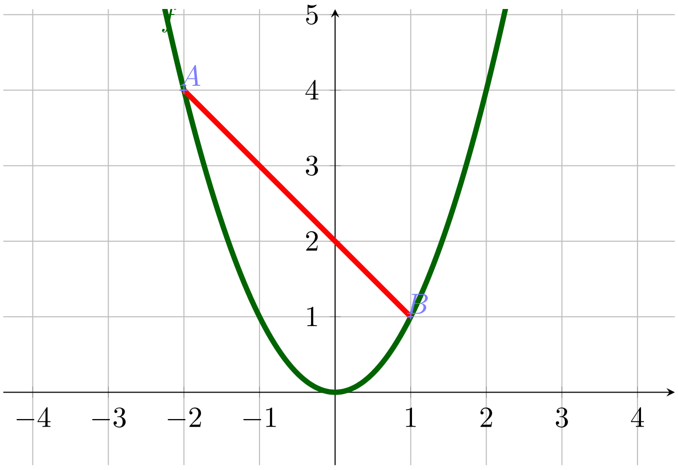
a. $f(x) = x^2 + 3x + 2$ b. $f(x) = -e^{-2x}$ c. $f(x) = 2\ln(x)$

II Fonction convexe et fonction concave

II.1 Une première définition

Définition

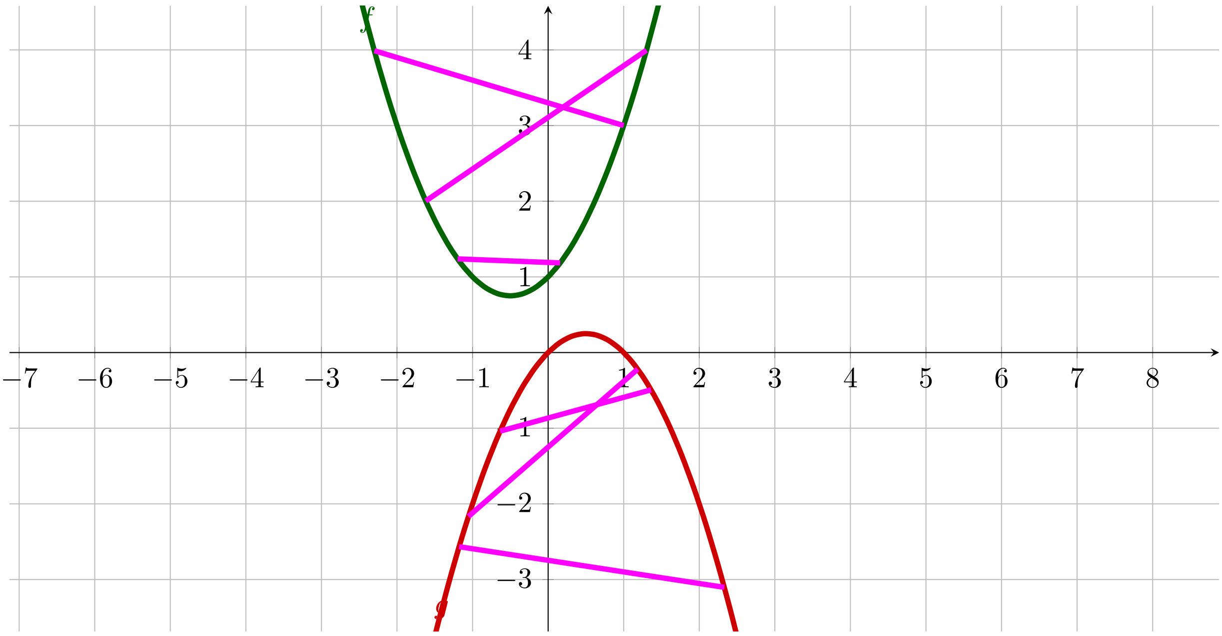
Une corde est un segment reliant deux points d'une courbe.
Ci-dessous, $[AB]$ est une corde de la fonction carré.



Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes (**courbe verte**).
- La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes (**courbe rouge**).

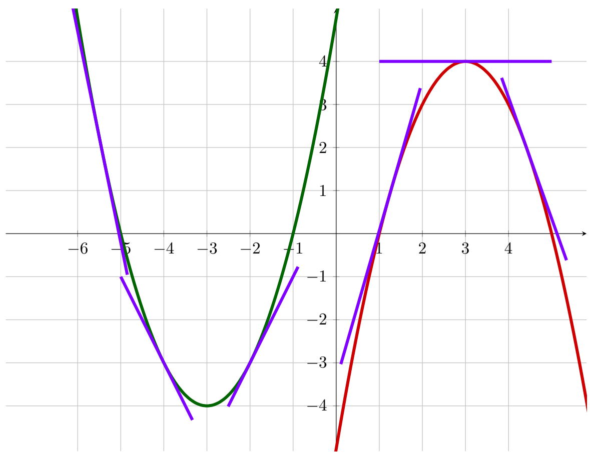


II.2 Une deuxième définition

Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Exemple

Donner des exemples de fonctions convexes et concaves.

Propriété

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe sur I, si sa dérivée f' est croissante sur I, soit

$$f''(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

- La fonction f est concave sur I, si sa dérivée f' est décroissante sur I, soit

$$f''(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \text{ de } I.$$

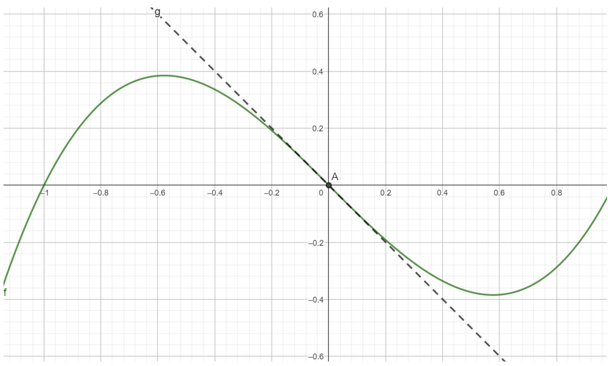
Exemple

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 2$.
Étudier la convexité de la fonction f.

III Point d'inflexion

Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.



Exemple

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois. Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par :

$$C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$$

a. À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction C. En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
b. Démontrer ces résultats.
c. Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction f.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

d. Déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.

e. Démontrer que $f''(x) = \left(\dfrac{x}{4} - 1\right) e^{-\frac{x}{2}}$

f. En déduire l'abscisse du point d'inflexion.