Version 241126

2024/2025

# Continuité

**Gustav Lejeune Dirichlet** est un mathématicien allemand qui vivait dans la première moitié du XIX eme siècle. Il a fourni de nombreux travaux concernant les fonctions, s'attachant toujours à une extrême rigueur dans le choix des hypothèses et la rédaction des démonstrations. Il propose en 1837 une définition de fonction dans laquelle l'image d'un élément n'est pas forcément obtenue par une expression utilisant des fonctions usuelles.

## I Notion de continuité

### I.1 Définition

Définition

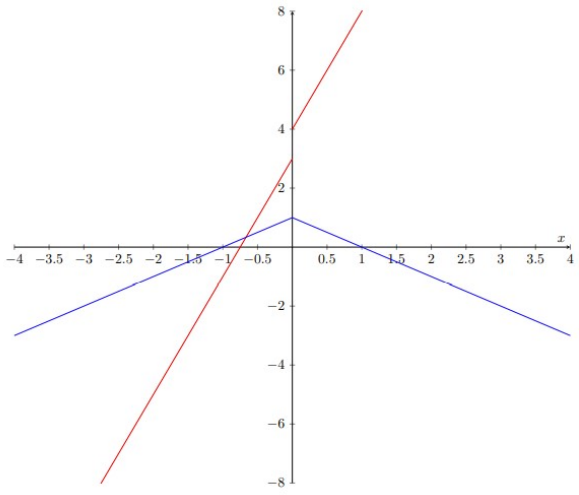
Soit $f$ une fonction définie dans un intervalle $I$, $x_0 \in I$.

- $f$ est dite **continue** en $x_0$ lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ;
- $f$ est dite **continue sur I** lorsqu'elle l'est en tout point de $I$.

Remarque

⚠ Une fonction continue en $x_0$ est forcément définie en $x_0$ mais la réciproque est fausse.

Intuitivement, une fonction est continue si l'on peut tracer la courbe représentative sans lever le crayon. Ci-dessous, la fonction représentée en rouge est discontinue en 0.




Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

⚠ Une fonction continue sur un intervalle $I$ n'est pas forcément dérivable (fonction valeur absolue).

### I.2 Continuité des fonctions usuelles

**Théorème**

Les fonctions usuelles sont continues sur tout intervalle inclus dans leurs ensembles de définitions respectifs. Par fonctions usuelles, on entend :

- les fonctions trigonométriques sinus et cosinus ;
- les fonctions polynomiales et rationnelles (quotient de deux fonctions polynômes) ;
- les fonctions racine carrée et la fonction valeur absolue ;
- la fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien.

**Théorème**

**Opérations algébriques sur des fonctions continues** Soit $f$ et $g$ deux fonctions réelles définies sur un intervalle $I$, $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ des réels.

- Si $f$ est continue sur $I$, alors $|f|$ est continue sur $I$.
- Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$, alors $f \times g$ est continue sur $I$.
- Si $f$ est continue et ne s'annule pas sur $I$, alors $\dfrac{1}{f}$ est continue sur $I$.

**Remarque**

Dans la pratique, les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

**Exemple**

Étudier la continuité d'une fonction sur un intervalle :

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{pour } x < 3 \\ x-4 & \text{pour } 3 \leq x < 5 \\ -2x+13 & \text{pour } x \geq 5 \end{cases}$

La fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

### I.3 Composée de fonctions continues

**Théorème**

Soit $f$ est $u$ deux fonctions telles que $f$ est continue dans un ensemble $J$, $u$ est continue dans un ensemble $I$ et que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Alors la composée $f \circ u$ est continue dans $I$ :

$$\forall x_0 \in I, \ \lim_{x \to x_0} (f \circ u)(x) = (f \circ u)(x_0)$$

## II Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème**

Soit $a$ et $b$ des réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Alors $f$ prend toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. Plus précisément, pour tout réel $k$, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un élément $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

**Corollaire :** si $f$ est strictement monotone sur $[a,b]$, alors quelque soit le réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un élément $c$ dans $[a,b]$, **unique**, tel que $f(c) = k$.

Pour comprendre cette démonstration, il sera très utile de faire un dessin.
On utilise les notations du théorème ci-dessus. Soit un réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Supposons sans perte de généralité que $f(a) \leq k \leq f(b)$ (la démonstration sera analogue dans le cas $f(b) \leq k \leq f(a)$.
Supposons $f(a) \leq k \leq f(b)$
On construit par récurrence des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ d'éléments de $I$ telles que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ :

$(C_n)$
- $a_0 \leq ... \leq a_n \leq b_n \leq ... \leq b_0$
- $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$
- $f(a_n) \leq k$, $f(b_n) \geq k$

**Initialisation :** Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$ de sorte que $f(a_0) \leq k$ et $f(b_0) \geq k$.
**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits $a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n$ vérifiant les conditions ci-dessus $(C_n)$. Considérons le milieu du segment $[a_n, b_n]$, $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
Deux cas se présentent :

- Si $f(c_n) \leq k$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$ de sorte que :
  - $a_0 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} = b_n \leq ... \leq b_0$
  - $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2} = \dfrac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}$
  - $f(a_{n+1}) = f(c_n) \leq k$, $f(b_{n+1} = f(b_n) \geq k$
- Si $f(c_n) > k$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$ de sorte que :
  - $a_0 \leq ... \leq a_n = a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq ... \leq b_0$
  - $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2} = \dfrac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}$
  - $f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq k$, $f(b_{n+1} = f(c_n) \geq k$
- Dans les deux cas nous avons construit $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ de sorte que :
  - $a_0 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq ... \leq b_0$
  - $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}$
  - $f(a_{n+1}) \leq k$, $f(b_{n+1} \geq k$

  La propriété $(C_{n+1})$ est vérifiée.

**Conclusion :** par récurrence, nous avons construit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que la suite $(a_n)$ est croissante, la suite $(b_n)$ décroissante, $b_n - a_n = \dfrac{b - a}{2^n}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n) \leq 0 \text{ et } f(b_n) \geq 0$$

Par conséquent, les suite $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite $c$.
Or par continuité de la fonction $f$, $f(a_n)$ et $f(b_n)$ convergent toutes deux vers $f(c)$.

$$k \leq f(c) \leq k \text{ d'où } f(c) = k$$

Démonstration

**Exemple**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[1; 2]$.

b. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution $\alpha$.

**Exemple**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[-1; 4]$.

## III Application à l'étude de suite.

**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur $J$, $(u_n)$ une suite de réels appartenant à un intervalle $J$ et $\beta$ un réel de $J$.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \beta, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\beta)$$

**Corollaire :** Si $f$ est continue sur $J$ et à valeurs dans $J$, $(u_n)$ la suite définie par récurrence par $u_0 \in J$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, et $\ell$ un réel de $J$.

$$\text{Si } (u_n) \text{ converge vers } \ell, \text{ alors } \ell = f(\ell)$$

**Exemple**

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ et $u_0 = 0$.

a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$

b. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.