Version 221104

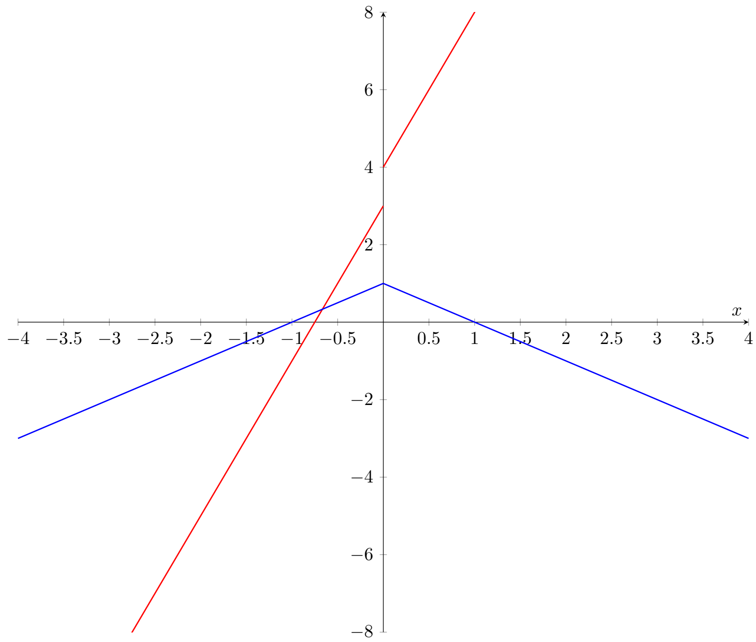
2022/2023

Continuité

I Premières notions de continuité

Exemple

Intuitivement, une fonction est continue si l'on peut tracer la courbe représentative sans lever le crayon. Ci-dessous, la fonction représentée en rouge est discontinue en 0.



Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

Exemple

Étudier la continuité d'une fonction sur un intervalle :

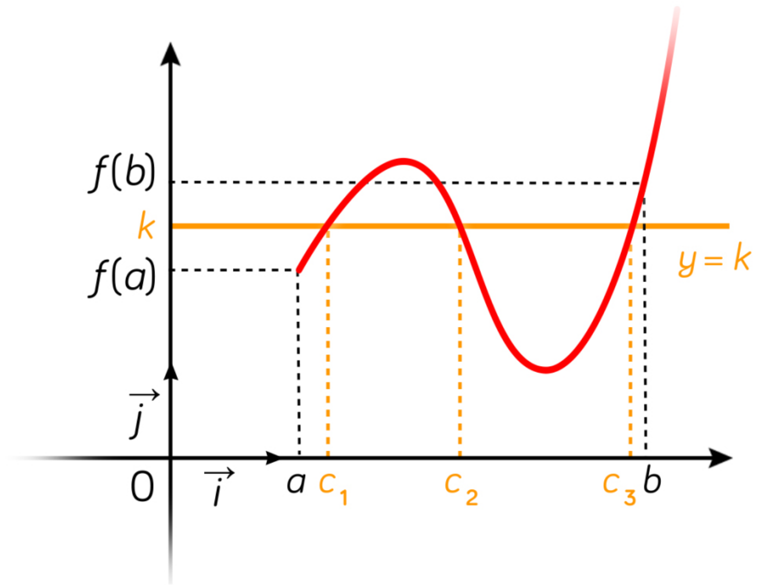
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{, pour } x < 3 \\ x-4 & \text{, pour } 3 \leq x \leq 5 \\ -2x+13 & \text{, pour } x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

II Théorème des valeurs intermédiaires : TVI

Théorème

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.



Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a;b]$.

Corollaire : On considère la fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a;b]$.

Remarque

Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exemple

Il est possible de lire sur un tableau de variations, le nombre de solution(s) éventuelle(s) d'une équation de la forme $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
A partir du tableau de variations ci-dessous, donner un encadrement de/des solutions des équations suivantes :

a. $f(x) = 0$ b. $f(x) = 1$ c. $f(x) = -7$ d. $f(x) = 5$

x	$-\infty$	-0.5	2	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	1 ↘	-6 ↗	$+\infty$

III Utilisation du TVI et de son corollaire.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet **exactement** une solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

b. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution de cette équation.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[-1; 4]$.