



NOMBRES COMPLEXES

I Rappels

I.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

- On appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe z l'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels.
- Soit un nombre complexe $z = a + ib$, on appelle **nombre complexe conjugué de z** , le nombre noté \bar{z} , tel que $\bar{z} = a - ib$.

Définition

- Le nombre a s'appelle la partie réelle et la nombre b s'appelle la partie imaginaire. On note : $Re(z) = a$ et $Im(z) = b$
- Si l'on additionne un nombre complexe et son conjugué, on obtient le double de sa partie réelle : $z + \bar{z} = 2a$

Remarque

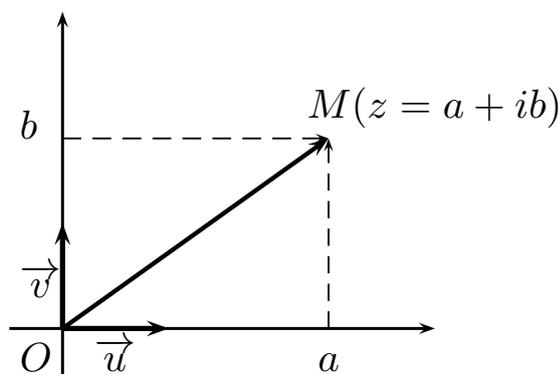
Exercice : résolution d'équations dans \mathbb{C}
Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a. $3z - 6 = 4i + z$

b. $z^2 + 5 = 0$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct.

- À tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on associe son **image**, le point M de coordonnées $(a; b)$ et tout vecteur $\vec{w}(a; b)$.
- À tout point $M(a; b)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, et à tout vecteur $\vec{w}(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur \vec{w} .



Définition

Exercice : plan complexe

Placer les points A , B et C d'affixe respectif : $z_A = -1 - 2i$, $z_B = 4 - i$ et $z_C = \sqrt{2} + \frac{3}{2}i$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer les longueurs OA , OB et OC et AB .

Définition

Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, que l'on appelle donc **axe réel**.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle, $z = 0 + iy = iy$ est appelé un nombre **imaginaire pur**. Les images de ces nombres sont les points de l'axe des ordonnées, que l'on appelle donc **axe imaginaire (pur)**.

II Exercices

Les règles de calcul sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes.

Exercice 1

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

- $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$
- $(5 + i) - (3 - 2i)$
- $(1 + i)(3 - 2i)$
- $(4 + i)(-5 + 3i)$
- $(2 - i)^2$
- $(x + iy)(x' + iy')$
- $(x + iy)^2$
- $(2 - 3i)(2 + 3i)$
- $(a + ib)(a - ib)$

Exercice 2

Les points A , B et C ont pour affixe respective $-2 + i$, $3 + 3i$, $1 + \frac{11}{5}i$.

- Calculer les affixes des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
- En déduire que les points A , B et C sont alignés.
- Placer les points A , B et C .

Exercice 3

Les points A , B et C ont pour affixe respective $1 + \frac{1}{2}i$, $\frac{3}{2} + 2i$ et $-1 - \frac{11}{2}i$.

Montrer que les points A , B et C sont alignés.

Exercice 4

On considère dans le plan complexe les points A , B , C et D d'affixe $z_A = 3 + i$, $z_B = 2 - 2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1 + 5i$.

- Faire une figure
- Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 5

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $\frac{1}{\sqrt{3} + 2i}$
- $\frac{1 + 4i}{1 - \sqrt{2}i}$
- $2 + i\sqrt{3}(5 - i) + \frac{1}{2} + 3i^2$
- i^3
- $\frac{1}{i}$
- i^4
- i^5
- i^6

Exercice 6

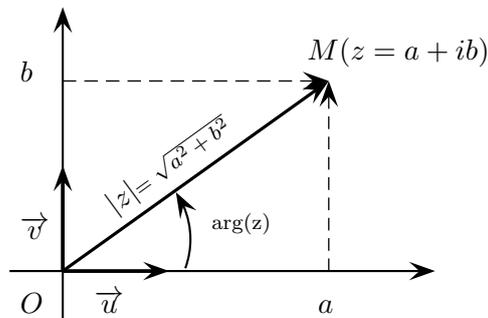
À propos de j .

- Donner la forme algébrique de : i^{12} ; i^{2012} ; i^{37} ; i^{-13}
- Calculer la somme : $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2014}$
- On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1 + j + j^2$.

III Module et argument d'un nombre complexe

Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

- On appelle **module** de z le nombre **réel positif** $\sqrt{a^2 + b^2}$ noté $|z|$. Cette valeur est égale à la distance OM .
- On appelle **argument** du nombre complexe non nul z , noté $\arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté : $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Définition

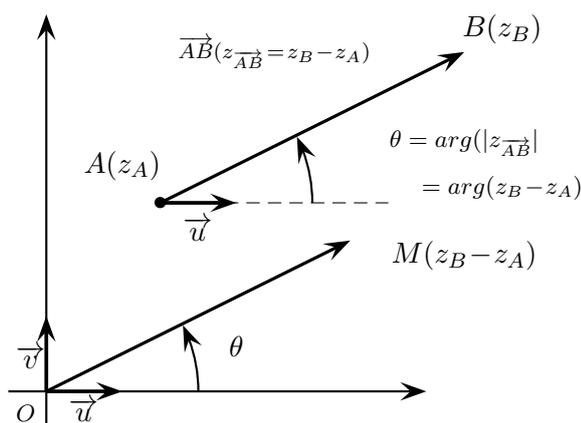
Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments : si θ est un de ces arguments, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On note $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π), ou $\arg(z) = \theta [2\pi]$, ou encore, pour simplifier (mais alors par abus de langage), $\arg(z) = \theta$.

Remarque

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ et donc,

- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$
- $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A)$.



Propriété

Pour tout nombres complexes z et z' :

- si $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
- $|-z| = |z|$ et $|\bar{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z||z'|$ et $|z^n| = |z|^n$ et $\frac{|z|}{|z'|} = \frac{z}{z'}$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Propriété

Exercices :

Exercice 1

Dans le plan complexe, A , B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 4 + 5i, \quad z_C = 5 - 2i.$$

- Montrer que $AB = AC$, puis que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.
- Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.
- Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.
- Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\bullet |z - 6i| = 3 \quad \bullet |z + 3 - 2i| < 2 \quad \bullet |z + 2| = |z - 3i + 1| \quad \bullet |2 - iz| = |z + 5| \quad \bullet \left| \frac{z + 2i}{z + 1 - 2i} \right| > 1$$

IV Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Dans le plan complexe un point M peut-être repéré par ses coordonnées cartésiennes $(x; y)$, ou son affixe complexe $z = x + iy$, ou par ses coordonnées polaires $(r; \theta)$, avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

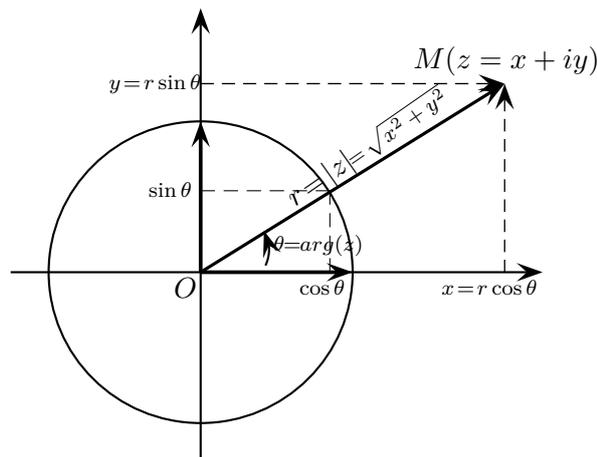
On a les relations :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \iff x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta$$

L'affixe z du point M s'écrit alors, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Cette écriture est la **forme trigonométrique** de z .



Définition

Exercice :

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $\bullet z_1 = 3$
- $\bullet z_2 = -4$
- $\bullet z_3 = 2i$
- $\bullet z_4 = -1 + i$
- $\bullet z_5 = -\sqrt{3} + i$
- $\bullet z_6 = -17$
- $\bullet z_7 = -6\sqrt{3} + 6i$
- $\bullet z_8 = 5i$
- $\bullet z_9 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

V Exponentielle complexe

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$. Comme les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} , f l'est aussi, et,

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos \theta = i(i \sin \theta + \cos \theta) = if(\theta)$$

Comme de plus, $f(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$, on en déduit que f est définie de manière unique par l'expression $f(\theta) = e^{i\theta}$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Ainsi, tout complexe z s'écrit sous la forme exponentielle complexe :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

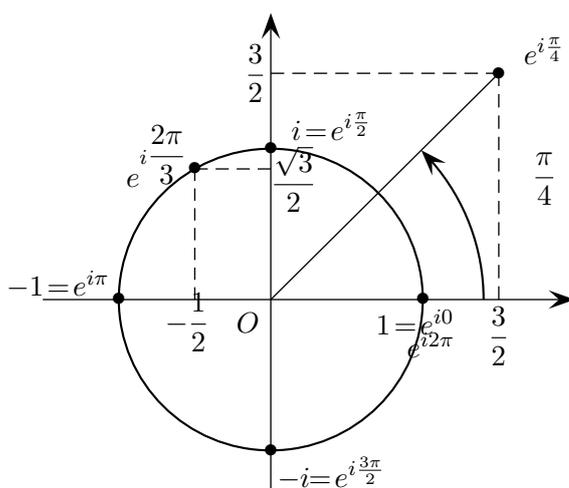
où, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Propriété

Exemple

- $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

- $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$



V.1 Exercices

a. Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

(a) $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(c) $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

(e) $2e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{3\pi}{2}}$

(b) $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$

(d) $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$

(f) $\frac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

b. Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

(a) 5

(c) $\frac{3}{2}i$

(e) $\sqrt{3} - i$

(b) $4 + 4i$

(d) $\frac{2}{1-i}$

(f) $(\sqrt{3} - i)^2$

(g) $(\sqrt{3} - i^3)$

Pour tous réels θ et θ' , et tout entier naturel n ,

- $|e^{i\theta}| = 1$, et $\arg(e^{i\theta}) = \theta$
- $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (Formule de Moivre), c'est-à-dire, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' [2\pi]$

V.2 Exercices

a. On donne $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1 z_2 z_3$, $\frac{z_1}{z_2 z_3}$, z_2^2 , z_3^6 .

b. Simplifier l'expression, où $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2.$$

Était-ce prévisible sans calcul ?

c. Écrire le nombre complexe $(\sqrt{3} - i)^{10}$ sous forme algébrique.

VI Formules de trigonométrie

VI.1 Formules d'addition

Soit a et b deux nombres réels quelconques. On a :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Démontrer la propriété précédente..

Exercices :

Exercice 1 :

À l'aide des formules d'addition, montrer que :

a. $2 \cos\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$

b. $\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$

c. $4 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \sin(2x) - 2\sqrt{2} \cos(2x)$

Exercice 2 :

En utilisant les formules d'addition, donner les valeurs exactes des cosinus et sinus de :

a. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

b. $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

c. $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.

Formules de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

Démontrer la propriété précédente..

VII Expression complexe des transformations

Soit un point M d'affixe z associé à un point M' d'affixe z' par une transformation du plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Il existe alors une fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} telle que $f(z) = z'$. La fonction f permet d'exprimer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M .

TRANSFORMATION	DÉFINITION	FONCTION ASSOCIÉE	FIGURE
Translation de vecteur \vec{u} (d'affixe b)	$\overline{MM'} = \vec{u}$	$f(z) = z + b$	
Homothétie de centre O et de rapport a (non nul)	$\overline{OM'} = a \overline{OM}$	$f(z) = az$	
Rotation de centre O et d'angle θ	$OM' = OM$ $(\overline{OM'}, \overline{OM}) = \theta$	$f(z) = e^{i\theta} z$	

Exercice :

Soit les fonctions f , g et h de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , données par les expressions suivantes :
 $f(z) = (1 - i)(1 + i)z$; $g(z) = z - 2i$; $h(z) = -e^{i\frac{\pi}{3}} z$

Reconnaitre la nature des transformations qui sont associées à chaque fonction.

On précisera les éléments qui caractérisent ces transformations.

Transformer $A \cos(\omega t + \phi) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(t) = \sqrt{3} \cos(3t) + \sin(3t)$.

Écrire f sous la forme : $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, A et ϕ à déterminer.