Nombres complexes

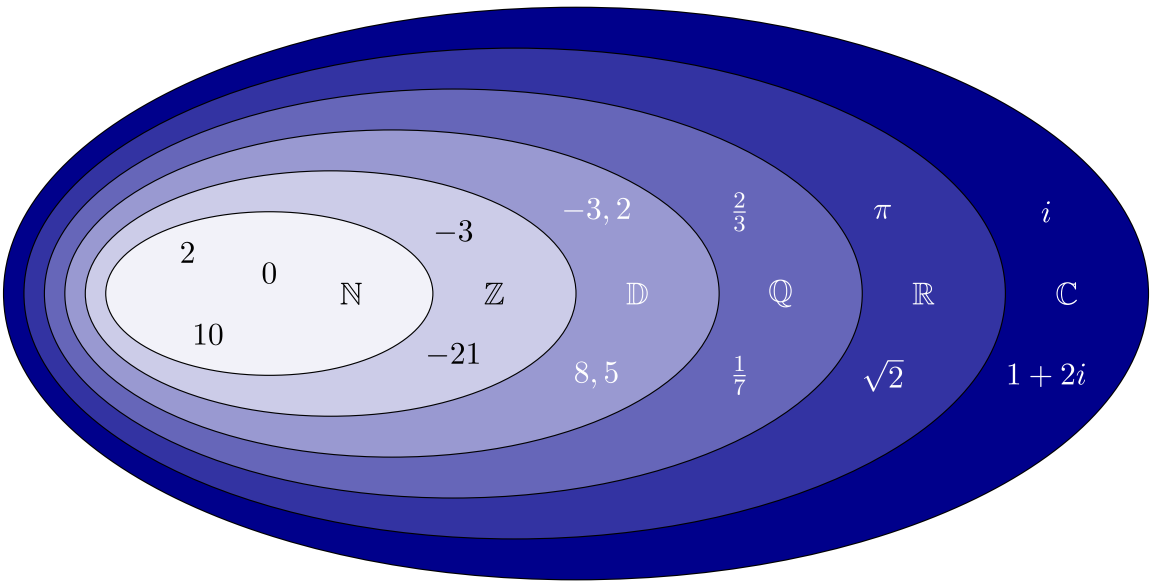
I Découverte de l'ensemble $\mathbb{C}$

Définition

Il existe un ensemble de nombre, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une multiplication et une addition qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Dans cet ensemble $\mathbb{C}$, il existe un nombre noté i, tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière **unique** $z = a + ib$ avec a et b réels.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



Définition

- On appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe z l'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels.
- Soit un nombre complexe $z = a + ib$, on appelle **nombre complexe conjugué de z**, le nombre noté $\overline{z}$, tel que $\overline{z} = a - ib$.

Remarque

- Le nombre a s'appelle la partie réelle et la nombre b s'appelle la partie imaginaire. On note : $\mathfrak{Re}(z) = a$ et $\mathfrak{Im}(z) = b$
- Si l'on additionne un nombre complexe et son conjugué, on obtient le double de sa partie réelle : $z + \overline{z} = 2a$

Exemple

Voici quelques exemples de nombres complexes :

- $z = 2 + 3i$ la partie réelle est $a = 2$ et la partie imaginaire $b = 3$.
- $z = 1 - i$ la partie réelle est $a = 1$ et la partie imaginaire $b = -1$.
- $z = 2$ est un réel et $z = 2i$ est un imaginaire pur.

Exercice : Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$

b. $z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$

c. $z_3 = (2 - 3i)^2$

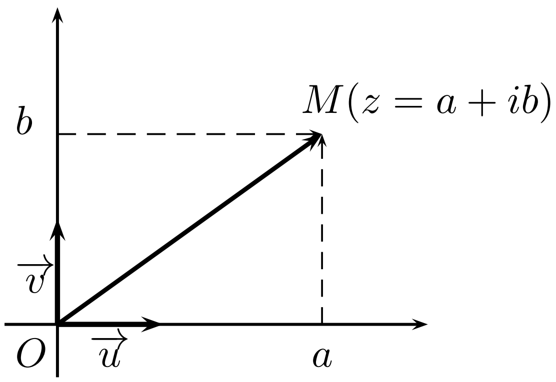
d. $z_4 = \dfrac{1+i}{2-i}$

II Découverte du plan complexe

Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ direct.

- À tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on associe son **image**, le point M de coordonnées $(a; b)$ et tout vecteur $\overrightarrow{w}(a; b)$.
- À tout point $M(a; b)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, et à tout vecteur $\overrightarrow{w}(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\overrightarrow{w}$.



Exercice : plan complexe

Placer les points A, B et C d'affixe respectif : $z_A = -1 - 2i$, $z_B = 4 - i$ et $z_C = 6 + \frac{1}{2}i$ dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Placer ensuite $\overline{z_A}$, $\overline{z_B}$ et $\overline{z_C}$.

Définition

Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, que l'on appelle donc **axe réel**.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle, $z = 0 + iy = iy$ est appelé un nombre **imaginaire pur**. Les images de ces nombres sont les points de l'axe des ordonnées, que l'on appelle donc **axe imaginaire (pur)**.

II.1 Propriétés du conjugués

Propriété

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ avec $z' \neq 0$.
- Soit $z = a + ib$ alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

III Exercices

Les règles de calcul sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes.

Exercice 1

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes, puis refaire l'exercice avec les conjugués de ces nombres.

- $(2+3i)+(-1+6i)$
- $(5+i)-(3-2i)$
- $(1+i)(3-2i)$
- $(4+i)(-5+3i)$
- $(2-i)^2$
- $(x+iy)(x'+iy')$
- $(x+iy)^2$
- $(2-3i)(2+3i)$
- $(a+ib)(a-ib)$

Exercice 2

Les points A, B et C ont pour affixe respective $-2+i$, $3+3i$, $1+\dfrac{11}{5}i$.

a. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

c. Placer les points A, B et C.

Exercice 3

Les points A, B et C ont pour affixe respective $1+\dfrac{1}{2}i$, $\dfrac{3}{2}+2i$ et $-1-\dfrac{11}{2}i$.

Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 4

On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixe $z_A = 3+i$, $z_B = 2-2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1+5i$.

a. Faire une figure

b. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 5

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2i}$
- $\dfrac{1+4i}{1-\sqrt{2}i}$
- $2+i\sqrt{3}(5-i)+\dfrac{1}{2}+3i^2$
- i^3
- $\dfrac{1}{i}$
- i^4
- i^5
- i^6

Exercice 6

À propos de j.

a. Donner la forme algébrique de : i^{12} ; i^{2012} ; i^{37} ; i^{-13}

b. Calculer la somme : $S = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2014}$

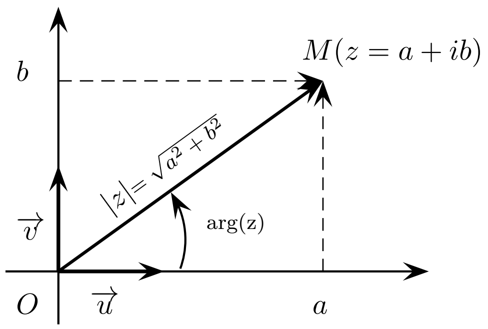
c. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1 + j + j^2$.

IV Module et argument d'un nombre complexe

Définition

Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

- On appelle **module** de z le nombre **réel positif** $\sqrt{a^2 + b^2}$ noté $|z|$. Cette valeur est égale à la distance OM.
- On appelle **argument** du nombre complexe non nul z, noté $arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.



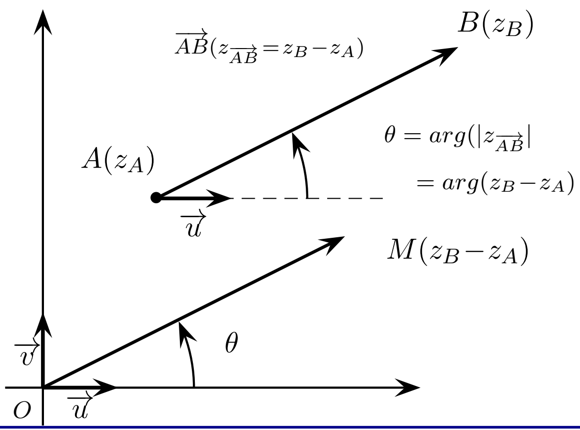
Remarque

Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments : si θ est un de ces argument, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
On note $arg(z) = \theta$ (modulo 2π), ou $arg(z) = \theta$ $[2\pi]$, ou encore, pour simplifier (mais alors par abus de langage), $arg(z) = \theta$.

Propriété

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ et donc,

- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_a|$
- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = arg(z_B - z_A)$.



Propriété

Pour tout nombres complexes z et z' :

- si $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
- $|-z| = |z|$ et $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ et $|z^n| = |z|^n$ et $\dfrac{|z|}{|z'|} = \dfrac{z}{z'}$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Exercices :

Exercice 1

Calculer :

a. $|3-2i|$

b. $|\overline{-3i}|$

c. $|\sqrt{2}+i|$

d. $\left|\dfrac{-3i}{(\sqrt{2}+i)^2}\right|$

Exercice 2

Placer les nombres complexes suivants dans le plan complexe :

a. z_1 tel que $|z_1| = 2$ et $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{2}$

b. z_2 tel que $|z_2| = 1$ et $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4}$

c. z_3 tel que $|z_3| = 3$ et $\arg(z_3) = \dfrac{3\pi}{4}$

d. z_4 tel que $|z_4| = 4$ et $\arg(z_4) = \dfrac{\pi}{3}$

Exercice 3

Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1+i \ , \ z_B = 4+5i \ , \ z_C = 5-2i \ .$$

a. Montrer que $AB = AC$, puis que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}$.

b. Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.

c. Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.

d. Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

Exercice 4

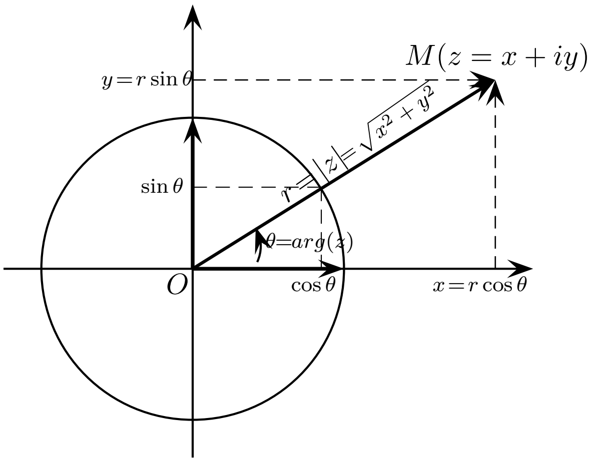
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- $|z-6i| = 3$
- $|z+3-2i| < 2$
- $|z+2| = |z-3i+1|$
- $|2-iz| = |z+5|$
- $|\dfrac{z+2i}{z+1-2i}| > 1$

V Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition

Dans le plan complexe un point M peut-être repéré par ses coordonnées cartésienne $(x;y)$, ou son affixe complexe $z = x + iy$, ou par ses coordonnées polaires $(r;\theta)$, avec $r = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM})$.
On a les relations :
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r} \iff x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$
L'affixe z du point M s'écrit alors, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
Cette écriture est la **forme trigonométrique** de z.



Exercice :
Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3$
- $z_2 = -4$
- $z_3 = 2i$
- $z_4 = -1 + i$
- $z_5 = -\sqrt{3} + i$
- $z_6 = -17$
- $z_7 = -6\sqrt{3} + 6i$
- $z_8 = 5i$
- $z_9 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$.

V.1 Exercices

Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

a. 5
b. $4 + 4i$
c. $\dfrac{3}{2}i$
d. $\dfrac{2}{1-i}$
e. $\sqrt{3} - i$
f. $(\sqrt{3} - i)^2$
g. $(\sqrt{3} - i^3)$