2024/2025

Combinatoire et dénombrement

Blaise Pascal (1623-1662) est un philosophe mystique mais aussi un grand mathématicien. Dès l'âge de quatorze ans, il participe avec son père aux réunions savantes organisées par un érudit, Martin Mersenne. Incroyablement précoce, il écrit dès l'âge de seize ans un ouvrage sur les courbes. Il s'intéresse à la combinaison pour résoudre des problèmes énoncés dans les courriers échangés avec Pierre de Fermat. Ceci l'amène à écrire en 1653 un traité du triangle arithmétique, notion qui porte désormais son nom.

I Opérations sur les ensembles

I.1 Ensembles et parties

Définition

Un **ensemble** A est une collection d'objets, appelés **éléments** de A. Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. **L'ensemble vide** est un ensemble qui n'a aucun élément.

- a élément de A sera noté $a \in A$.
- L'ensemble vide est noté $\emptyset$

Définition

Une **partie** B d'un ensemble A est un ensemble d'éléments de A. Si B est une partie de A on dit que B est inclus dans A.
On note $B \subset A$.
L'ensemble des parties de de A se note $\mathcal{P}(A)$

Remarque

- $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.
- L'ensemble A lui-même et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des parties de A.

Exemple

Démontrer les égalités suivantes par la méthode de double inclusion :

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

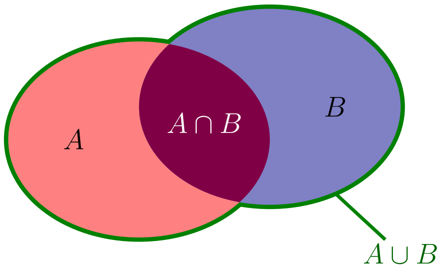
Soit $x \in \overline{A \cup B}$ (non($x \in A$ ou $x \in B$)) donc $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$. On a finalement $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
D'où $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
Soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ (non($x \in A$) et non($x \in B$)) donc $x \notin A$ et $x \notin B$ (non(x est dans A ou B)).
Donc $x \in \overline{A \cup B}$.
D'où $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$
Par double inclusion, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

I.2 Opérations ensemblistes

Définition

Soit A et B deux ensembles.

- **La réunion** de A et B, noté $A \cup B$ est l'ensemble des objets qui appartiennent à A **ou** à B.
- **L'intersection** de A et B, notée $A \cap B$ qui appartiennent à la fois à A et à B.
- **La différence** dans A et B, noté $A - B$ est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.
- Si B est une partie de A, **le complémentaire** de B dans A, noté $\overline{B}$ est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.



Remarque

Deux parties d'un ensemble sont **disjointes** lorsque leur intersection et vide :

$$A \cap B = \emptyset$$

Définition

On appelle couple (a, b) la suite formée de deux objets : le premier est a le deuxième est b.
Si A et B sont deux ensembles, le **produit cartésien** $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.
Plus généralement, **un k-uplet** est une suite de k objet. **Le produit cartésien** $A_1 \times A_2 \times \ldots.. \times A_k$ est l'ensemble des k-uplets dont le j^{ieme} objet est une élément de A_j pour $j \in [[1, k]]$.

II Dénombrement

Définition

Étant donné un ensemble fini A, on appelle **cardinal** de A le nombre d'éléments de A, on note $Card\ (A) = n$ ou $|A|$cet entier. **Dénombrer** un ensemble, c'est calculer son nombre d'éléments.
Ainsi $Card\ (\emptyset) = 0$

Exemple

- L'ensemble E des joueurs d'une équipe de foot est un ensemble fini. Alors $Card\ (E) = 11$.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas un ensemble fini.

Théorème

Si A et B sont deux ensembles finis disjoints alors :

$$Card\ (A \cup B) = Card\ (A) + Card\ (B)$$

Propriété

Soit A et B deux ensembles finis quelconques alors :

$$Card\ (A \cup B) = Card\ (A) + Card\ (B) - Card\ (A \cap B)$$

Propriété

Soit A et B deux ensembles finis quelconques.

- Si $B \subset A$ alors $Card\ (\overline{B}) = Card\ (A) - Card\ (B)$.
- Si A et B sont deux ensembles quelconques alors $Card\ (A - B) = Card\ (A) - Card\ (A \cap B)$

Exemple

Soit l'ensemble des élèves d'une classe de 32 élèves.

- Soit A l'ensemble des garçons (18 élèves).
- Soit B l'ensemble des filles (14 élèves).
- Soit C l'ensemble des élèves pratiquants le VTT (10 élèves : 5 filles et 5 garçons). Donner le nombre d'éléments des ensembles suivants :

a. $A \cup B$

b. $A \cup C$

c. $A \cap B$

d. $A \cap C$

Théorème

Principe additif : soit $A_1, ..., A_k$ des ensembles finis deux à deux disjoints.

$$Card\ (A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_k) = Card\ (A_1) + Card\ (A_2) + ... + Card\ (A_k)$$

Exemple

Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre.
On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune.
Calculer le nombre d'élèves de cette classe.

II.1 Produits cartésiens d'ensembles finis

Théorème

Si A et B sont deux ensembles quelconques :

$$Card\ (A \times B) = Card\ (A) \times Card\ (B)$$

Théorème

Principe multiplicatif : soit $A_1, ..., A_k$ des ensembles finis.

$$Card\ (A_1 \times A_2 \times ...... \times A_k) = Card\ (A_1) \times Card\ (A_2) \times .... \times Card\ (A_k)$$

$$Card\ (A^k) = Card\ (A)^k$$

Exemple

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.

a. Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?

b. Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

III Analyse combinatoire

Soit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à la question du nombre de façons de choisir k objets dans un ensemble E_n qui en contient n. Deux questions se posent :

- Le choix est-il ordonné ou non ordonné ?
- Le choix se fait sans répétition possible ou avec répétition ?

III.1 Choix ordonnés avec ou sans répétition : les k-uplets.

Définition

- Si k est un entier naturel, une k-liste ou un k-uplet est une suite de k objets. Si ces objets sont des éléments d'un même ensemble A, on dira qu'il s'agit d'une k-liste de A.
- Soit E_n un ensemble à n éléments. Une k-liste d'éléments **distincts** de E_n, est un **arrangement** de k éléments de E_n parmi n.
- Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un n-uplet d'éléments **distincts** de E.

Théorème

Soit E_n un ensemble à n éléments. Le nombre de k-liste de E_n est :

$$Card\ (A^k) = n^k$$

Exemple

« Il y avait pour entrer juste un digicode
Deux lettres et dix chiffres incommodes
Un détail que t'avais surement oublié
4 milliards de possibilités »
Le refrain de la chanson « Digicode » de l'artiste Oldelaf comporte une erreur à corriger en considérant que le code est constitué de 2 lettres (parmi A, B, C, ... Z) suivies de 10 chiffres (parmi 0, 1, 2, ... 9).
Par exemple, RT 49903 42472 pourrait être un code à composer sur le digicode.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit E_n un ensemble à n éléments. Le nombre de **permutations** de E_n, est le nombre :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ..... \times 1$$

$n!$ se lit **factorielle n**.

Théorème

Soit n et k deux entiers de E_n un ensemble à n éléments. Le nombre de k-listes d'éléments distincts de E_n (arrangements), est :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple

Pour nettoyer un appareil électrique, Fred débranche les 3 prises qui se trouvent à l'arrière de l'appareil.
Mais au moment d'effectuer à nouveau les branchements, il se rend compte qu'il existe 12 positions différentes pour les 3 prises.
Comme il n'a pas pris soin de noter les positions respectives des 3 prises et qu'il n'y connait rien en électronique, il décide d'effectuer les branchements au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il retrouve le bon branchement.

Exemple

Pour une conférence, on a invité 12 scientifiques, 6 hommes et 6 femmes renommés, qui seront placés au premier rang de la salle qui comprend 12 places. On attend 5 mathématiciens, 3 physiciens et 4 biologistes.
C'est le moment de prendre place, l'organisateur demande aux scientifiques de s'installer.

- Les mathématiciens proposent que chacun choisisse une place au hasard.
- Les physiciens préfèrent rester ensemble et qu'ainsi tous les physiciens soient assis côte à côte.
- Les biologistes disent que dans ce cas, il serait mieux que les hommes se placent ensemble et que les femmes en fassent de même.

Calculer le nombre de façons différentes de s'assoir pour chaque proposition.

III.2 Choix non ordonnés avec ou sans répétition : les combinaisons

Définition

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ et E_n un ensemble à n éléments. **Une combinaison** de k éléments de E_n est une partie de E_n à k éléments.

Théorème

Soit A un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de A est :

$$Card\ (\mathcal{P}(A)) = 2^n$$

Démonstration

Cette démonstration utilise le principe multiplicatif :
Une partie A de E_n est entièrement et uniquement déterminée, lorsqu'on sait pour chaque élément de E_n s'il appartient ou pas à A. Pour dénombrer l'ensemble des parties de E_n, on peut donc raisonner par étapes :

- La partie A contient-elle l'élément e_1, oui ou non (2 possibilités) ?
- La partie A contient-elle l'élément e_2, oui ou non (2 possibilités) ?
  ....
- La partie A contient-elle l'élément e_n, oui ou non (2 possibilités) ?

Finalement, d'après le principe multiplicatif, le nombre de parties de En est $2 \times 2 \times \ldots\ldots. \times 2 = 2^n$

Théorème

Le nombre de parties (combinaisons) de k éléments d'un ensemble à n éléments est :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots. \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \times \ldots\ldots. \times 1}$$

On note cette quantité $\binom{n}{k}$:

- Si $0 \leq k \leq n$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots. \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \times \ldots\ldots. \times 1}$
- Si $k > n$, $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$

Exemple

Pour comprendre :
Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 4, 7, 9\}$. Nous allons chercher à compter le nombre de parties à 3 éléments dans E. Par exemple $\{1, 7, 9\}$.
Pour le premier éléments, nous avons 5 possibilités, puis 4 pour le second, et enfin 3 pour le troisième. Il y a donc $5 \times 4 \times 3 = 60$ triplets possibles.
Or, parmi ces 60 possibilités, il y aura des répétitions (faire un arbre si besoin). Par exemple, nous obtiendrons le triplet $(2, 4, 9)$ mais aussi $(2, 9, 4)$, $(4, 2, 9)$, $(4, 9, 2)$, $(9, 4, 2)$, et $(9, 2, 4)$. Ces six triplets correspondent à la même partie $A = \{2, 4, 9\}$ de E.
Il va donc être nécessaire de diviser par le nombre de répétitions (nombre de permutations) de chaque triplets :
Parmi trois éléments, il existe $3 \times 2 \times 1$ permutations possibles (faire un arbre si necessaire).
Il convient donc de diviser par 6 le nombre de triplets possibles.

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

Il y a donc 10 parties possibles à 3 éléments dans un ensemble à 5 éléments.

Exemple

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints.

a. Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?
b. Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

Remarque

Pour tout entier naturel n :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n$$

Propriété

Symétrie des coefficients binomiaux
Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Relation de Pascal
Pour tous entiers n et k, on a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Le triangle de Pascal :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	…
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Exemple

Calculer les coefficients binomiaux suivants :

a. $\dbinom{100}{1}$

b. $\dbinom{7}{6}$

c. $\dbinom{25}{24}$

d. $\dbinom{4}{2}$

e. $\dbinom{7}{2}$

f. $\dbinom{8}{3}$

Démonstration

Relation de Pascal :
Pour démontrer cette relation, nous allons voir deux méthodes différentes.
Preuve calculatoire :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\
&= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}\\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Preuve combinatoire :

Observons tout d'abord que d'après le deuxième théorème du $III.2$, $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de parties à $k+1$ éléments d'un ensemble à $(n+1)$ éléments. Pour établir la relation de Pascal, nous allons dénombrer l'ensemble des parties à $k+1$ éléments d'une autre manière. Pour cela, considérons un ensemble E_{n+1} à $n+1$ éléments $E_{n+1}=\{e_0,e_1,.....,e_n\}$. Les parties de E_{n+1} qui ont $k+1$ éléments sont de deux sortes :

- Les parties qui ne contiennent pas e_0. Ce sont en fait des parties à $k+1$ éléments de e_n. Il y en a $\binom{n}{k+1}$ de cette sorte.
- Les parties qui contiennent e_0. ces parties sont constituées de e_0 et d'une partie à k éléments de E_n. Combien existe-t-il de partie de cette sorte ? Il y en a autant que de partie à k élément de E_n soit $\binom{n}{k}$.

Finalement, d'après le principe additif :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Théorème

Le binôme de Newton : soit $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=(a+b)^n$$

Théorème

Soit n et k deux entiers naturels :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

Nous allons dénombrer d'une autre façon l'ensemble $\mathcal{P}(E_n)$ des parties de E_n (voir démonstration du premier théorème du III.2).
Nous utiliserons le principe additif :
Soit $E_n = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ un ensemble fini de cardinal n.
Une partie A de E_n possède k éléments avec $k \in [[0; n]]$. Pour calculer le nombre de parties de E_n, on discute suivant le nombre d'éléments k dans A :

- Soit $k = 0$, il y a $\binom{n}{0} = 1$ partie de E_n à 0 élément, c'est la partie vide.
- Soit $k = 1$, il y a $\binom{n}{1} = n$ parties de E_n à 1 élément, ce sont des singletons.
- Soit $k = 2$, il y a $\binom{n}{2}$ parties de E_n à 2 élément, ce sont des paires.
  ......
- Soit $k = n$, il y a $\binom{n}{n} = 1$ partie de E_n à n élément, c'est E_n tout entier.

Finalement, d'après le principe additif, le nombre de parties de E_n est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
Or d'après le théorème précédent $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$
D'où le résultat.

Démonstration