Version 241022

2024/2025

INJECTION, SURJECTION, BIJECTION

I Application

Définition

Soit deux ensembles E et F et f une relation de E dans F.

- f est une application si tout élément $x \in E$ possède une image unique dans F, $f(x) \in F$.

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F \mid y = f(x)$$

- L'ensemble E est appelé ensemble de départ de f et F l'ensemble d'arrivée de f.
- $f(x)$ est appelé l'image de x par f.
  Tout élément $x \in E$ pour lequel $y = f(x)$ est appelé antécédent de y par f.

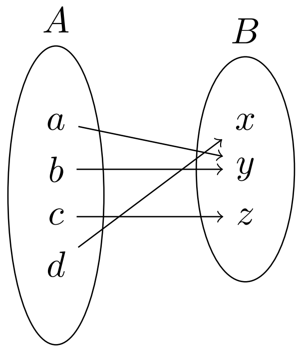
Remarque

- les relations telles que, de chaque élément de l'ensemble de départ, il part au plus une flèche, s'appellent des fonctions ;
- les relations telles que, de chaque élément de l'ensemble de départ, il part exactement une flèche, s'appellent des applications.

En pratique, le fait qu'il suffise de réduire l'ensemble de départ d'une fonction à son ensemble de définition pour la transformer en application rend peu utile ce distinguo.

Exemple

Une application représentée par un diagramme sagittal



- a et b ont la même image par f ;
- chaque élément de l'ensemble de départ A admet une image dans B.

II Image d'une partie, d'une application

Définition

Soient f une application de E dans F et A une partie de E.

- On appelle image de A par f , l'ensemble, notée $f(A)$, telle que :

$$f(A) = \{y \in F,\ \exists a \in A,\ y = f(a)\} = \{f(a)\}_{a \in A}$$

- L'image de E est appelée image de f et notée $\mathrm{Im} f$

III Image réciproque d'un application

Définition

Soient f une application de E dans F et B une partie de F.
On appelle image réciproque de B par f , l'ensemble noté $f^{-1}(B)$, tel que :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$$

La notation $f^{-1}(B)$ pourrait faire penser que la fonction réciproque f^{-1} existe, ce qui n'est pas le cas si f n'est pas bijective. La notation $f^{-1}(B)$ fait simplement référence à une partie de E.

IV Composition d'applications

Définition

Soient f et g deux applications, $f\ :\ E \longmapsto F$ et $g\ :\ F \longmapsto G$
L'application composée de f suivie de g, notée $g \circ f$, est telle que :

$$g \circ f\ :\ \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto g[f(x)] \end{cases}$$

Remarque

On ne peut pas nécessairement définir la composée $f \circ g$ à partir des mêmes ensembles. Dans le cas où cela serait possible, la composée de deux applications n'est pas commutative, en général : $f \circ g \neq g \circ f$.

Définition

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$

V Restriction et prolongement d'une application

Définition

Soit A une partie de E :

- Soit $f\ :\ E \longmapsto F$ une application.
  On appelle restriction de f à A l'application notée $f_{|A}$ de A dans F telle que :

$$\forall x \in A,\ f_A(x) = f(x)$$

- Soit $f\ :\ A \longmapsto F$ une application.
  On appelle prolongement de f à E l'application notée g de E dans F telle que :

$$\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$$

Remarque

Quand une fonction admet une limite à l'une des bornes ouvertes finies de son ensemble de définition, on peut prolonger la fonction par continuité.

Par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ peut être prolongée en 0.

VI Injection

Définition

Soit l'application f de E dans F.
f est injective sur E si tout élément de F possède au plus un antécédent :

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Exemple

Faire le diagramme sagittal d'une application injective :

Remarque

Le cardinal de l'ensemble de départ sera alors inférieur ou égal au cardinal de l'ensemble d'arrivé de l'application injective.

Exemple

Montrer que l'application $f\ :\ x \mapsto f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ est injective sur $\mathbb{R}/\{1\}$

Propriété

Soient f et g deux applications, $f\ :\ E \longmapsto F$ et $g\ :\ F \longmapsto G$.

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective

Exemple

Démontrer les deux points ci-dessus.

Théorème

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone sur A alors f est injective sur A

Remarque

La réciproque est fausse car f peut être injective sur A sans être monotone sur A. Dans ce cas la fonction f n'est pas continue sur A.

Exemple

La fonction cos est injective sur $[0;\pi]$ car strictement décroissante. On en déduit l'implication sur $[0;\pi]$, $\cos x = \cos y \Longrightarrow x = y$.
Il est à remarquer que cette implication n'est pas vrai sur $\mathbb{R}$ car la fonction cos est périodique.

VII Surjection

Définition

Soit f une application de E dans F.
f est surjective si tout élément de F possède au moins un antécédent dans E. On a alors $Imf = F$

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$$

Exemple

Faire le diagramme sagittal d'une application surjective :

Remarque

Le cardinal de l'ensemble de départ sera alors supérieur ou égal au cardinal de l'ensemble d'arrivé de l'application sujective.

Exemple

La fonction carré est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème

Soient f et g deux applications, $f\ :\ E \longmapsto F$ et $g\ :\ F \longmapsto G$.

- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective

Exemple

Démontrer les deux points ci-dessus.

VIII Bijection

Soit f une application de E dans F.
f est bijective sur F si f est injective et surjective. Tout élément de F possède un et un seul antécédent dans E.

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E \mid y = f(x)$$

Définition

Exemple

Faire le diagramme sagittal d'une application bijective :

Le cardinal de l'ensemble de départ sera alors égal au cardinal de l'ensemble d'arrivé de l'application bijective.

Remarque

Exemple

La fonction cube est bijective sur $\mathbb{R}$.

Si une application f est bijective de E sur F, alors il existe une unique application réciproque, noté f^{-1} de F sur E telle que :

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow f \circ f^{-1} = Id_f \text{ et } f^{-1} \circ f = Id_E$$

Si l'on peut trouver une application réciproque f^{-1} à l'application f alors f est bijective.

Théorème

Dans le cas d'une bijection f définie d'une partie de $\mathbb{R}$ sur une partie de $\mathbb{R}$, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la 1^{re} bissectrice d'équation $y = x$.

Remarque

Une application f de E dans E est involutive si : $f \circ f = Id_E$.
f est alors une bijection et $f^{-1} = f$

Définition

Exemple

La fonction définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une application involutive. En effet lorsque l'on prend l'inverse de l'inverse d'un nombre on retrouve ce nombre.

Théorème

Soient f et g deux applications, $f\ :\ E \longmapsto F$ et $g\ :\ F \longmapsto G$.

- Si f est bijective de E sur F alors f^{-1} est bijective de F sur E et : $(f^{-1})^{-1} = f$
- Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Exemple

Démontrer les deux points ci-dessus.