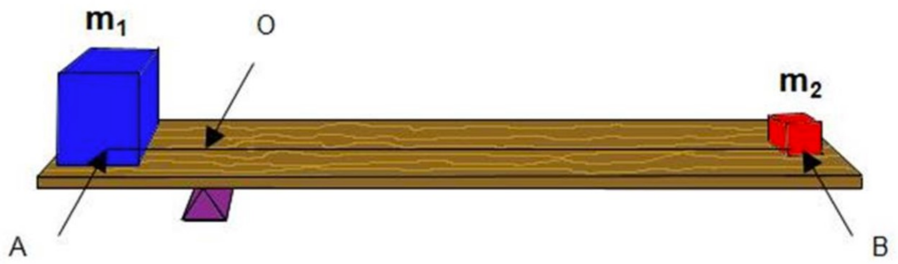
2024/2025

# Barycentres

Le terme barycentre est formé sur la racine grecque « barus » qui signifie « pesant, lourd » pour désigner un centre des poids ou un centre d'équilibre. Sa conception est liée au théorème des moments découvert par Archimède au III ème siècle av J.-C.




## I Rappels sur les vecteurs

**Définition**

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- une longueur qui correspond à la longueur du segment $[AB]$.
- une direction : celle de la droite $(AB)$
- un sens : de $A$ vers $B$.

**Propriété**

**Somme de vecteur** : L'ensemble des vecteurs de l'espace muni de l'addition est un groupe abélien donc :

- $+$ est associative : $\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}$
- $+$ est commutative : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$
- il existe un élément neutre pour $+$ : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$
- tout vecteurs possède un opposé : $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$

**Propriété**

L'ensemble des vecteurs muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel donc :

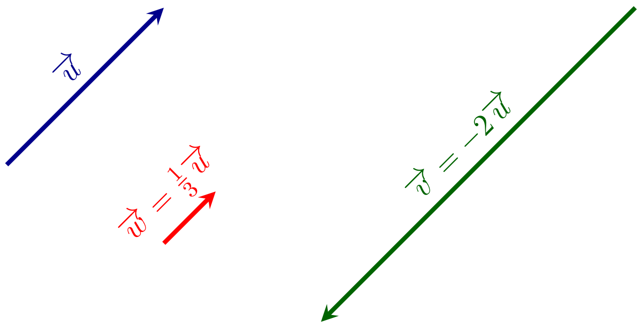
- $\lambda(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\lambda\overrightarrow{u}+\lambda\overrightarrow{v}$
- $(\lambda+\mu)\overrightarrow{u}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{u}$
- $(\lambda\mu)\overrightarrow{u}=\lambda(\mu\overrightarrow{u})$
- $1\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$

Avec $\lambda$ et $\mu$ deux réels.

**Propriété**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.




**Définition**

**Déterminant**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

On note : $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

**Propriété**

Dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires revient à dire que :

$$det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$$

**❤ Démonstration ❤**

Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.
Par exemple $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $0y' - 0x' = 0$

$\Longrightarrow$ Supposons maintenant que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient non nuls :
Dire que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel $k$ tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.
Les coordonnées des vecteurs et sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

| | |
|---|---|
| x | x' |
| y | y' |

Donc : $xy' = yx'$ soit encore $xy' - yx' = 0$.

$\Longleftarrow$ Réciproquement, si $xy' - yx' = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{v}$ étant non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle.

- Supposons que $x' \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx' = 0$ s'écrit : $yx' = xy'$.
  Soit : $y = \frac{xy'}{x'} = ky'$
  Comme on a déjà $y = kx'$, on en déduit que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.
- Si $x' = 0$, alors $y' \neq 0$, et on peut suivre le même raisonnement avec $k = \frac{y}{y'}$.

## II Système de points pondérés

- On appelle point pondéré la donnée d'un point $A$ et d'un nombre réel $\alpha$ : on le notera $(A, \alpha)$. On dit que $\alpha$ est la masse du point pondéré $(A, \alpha)$.
- On appelle système de points pondérés un ensemble fini de point pondérés :

$$\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)\}$$

  On appelle masse d'un système de points pondérés, la somme des masses des points du système :

$$m = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

Définition

## III Barycentre de deux points pondérés

Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ un système de deux points pondérés dont la masse totale $m = \alpha + \beta$ est non nulle.
Alors il existe un unique point $G$ tel que

$$\alpha \cdot \overrightarrow{GA} + \beta \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

Ce point $G$ s'appelle barycentre du système $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$, et se note :

$$G = Bar\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$$

Définition

Soit $M$ un point quelconque. D'après la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}
&\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} \\
&= \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) \\
&= \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} \\
&= (\alpha + \beta)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Par conséquent, il s'agit alors de pouvoir placer le point $G$,

$$\begin{aligned}
&\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \\
&\text{ssi} \quad (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\
&\text{ssi} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'existence et l'unicité du point $G$.

Démonstration

Le mot barycentre renvoie à la notion de centre d'inertie ou de gravité en physique.

Remarque

Si $G$ est le barycentre des points pondérés $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$, alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

Propriété

**Exemple**

$A$ et $B$ étant donnés, placer les barycentres $G_1$ et $G_2$ des points pondédérés respectifs $(A, 3)$, $(B, 1)$ et $(A, -1)$, $(B, 3)$.
Comme $G_1$ est le barycentre de $(A, 2), (B, 1)$, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2+1}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

Comme $G_2$ est le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 3)$, on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{-1+3}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Remarque

- Lorsque $\alpha = \beta$, on dit que $G$ est l'isobarycentre des points $A$ et $B$. $G$ est alors le milieu du segment $[AB]$.
- Le barycentre $G$ est situé sur la droite $(AB)$.

Propriété

**Homogénéité du barycentre.** Si $G$ est le barycentre de $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$ alors $G$ est aussi le barycentre de $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$ lorsque $k$ est un réel non nul.

Démonstration

Cela découle de la définition :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \quad \text{ssi} \quad k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

avec $k \neq 0$.

**Exemple**

Le barycentre de $\left(A, \frac{1}{10}\right)$ et $\left(B, \frac{1}{5}\right)$ est aussi le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 2)$.

Propriété

Le barycentre de deux point $A$ et $B$, se situe sur la droite $(AB)$.
Réciproquement si trois points sont alignés, alors l'un est le barycentre des deux autres.

Théorème

**Formule de réduction :** si $G$ est le barycentre de $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$ alors pour tout point $M$ du plan, on a :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

Démonstratio

En appliquant la relation de Chasles :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

**Exemple**

**Application :** Cette formule de réduction permet de déterminer les lignes de niveau c'est à dire de déterminer puis tracer l'ensemble des points $M$ qui vérifient une relation vectorielle.
Soit $[AB]$ est un segment de longueur 5 cm. Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des point $M$ qui vérifient la relation $(R)$ :

$$||2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|| = 10$$

On pose le point $G$ barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 3)$, d'après la formule de réduction, on a :

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$$

Donc

$$||2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|| = ||5\overrightarrow{MG}|| = 10$$

D'où $||\overrightarrow{MG}|| = 2$
L'ensemble $\Gamma$ est donc le cercle de centre $G$ est de rayon 2.
Pour tracer $\Gamma$, on trace d'abord $G$ qui vérifie :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

**Propriété**

Si $G$ est le barycentre de $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$, alors les coordonnées du point $G$ dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ vérifient :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$$

**Démonstration**

Cette formule dépend directement de la formule de réduction en prenant pour le point M le point origine O

**Exemple**

On considère les points $A(1; 3)$ et $B(2; 1)$. Déterminer les coordonnées du point $M$, barycentre des points $(A; -1)$ et $(B; 3)$, et $N$, barycentre de $(A; 2)$ et $(B; -1)$ puis placer les points $A$, $B$, $M$ et $N$.

## IV Barycentre de trois points

**Définition**

Soit $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ un système de trois points pondérés dont la masse totale $m = \alpha + \beta + \gamma$ est non nulle.
Alors il existe un unique point $G$ tel que

$$\alpha \cdot \overrightarrow{GA} + \beta \cdot \overrightarrow{GB} + \gamma \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Ce point $G$ s'appelle barycentre du système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$, et se note :
$G = Bar\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$

**Démonstration**

Soit $M$ un point quelconque. D'après la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}
&\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\\
&=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+\gamma(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})\\
&=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Par conséquent, il s'agit alors de pouvoir placer le point $G$,

$$\begin{aligned}
&\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\\
&\text{ssi}\quad(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}\\
&\text{ssi}\quad\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'existence et l'unicité du point $G$.

**Remarque**

L'isobarycentre ($\alpha=\beta=\gamma$) de trois points $A$, $B$ et $C$ est le centre de gravité du triangle ABC.

## V Associativité du barycentre

**Théorème**

**Théorème d'associativité** : Si $G$ est le barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ et si $H$ est le barycentre de $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ avec $\alpha+\beta\neq 0$, alors $G$ est le barycentre de $\{(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$

**Démonstration**

Toujours avec la relation de Chasles. On sait que $G$ est le barycentre de $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ donc :

$$\begin{aligned}
&\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\\
&\text{ssi}\quad\alpha\overrightarrow{GH}+\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\left(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HB}\right)+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\\
&\text{ssi}\quad(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

D'où le résultat...

**Remarque**

Ce théorème est bien utile pour placer le barycentre de trois points car il permet de placer le barycentre de 3 points en plaçant coup sur coup le barycentre de deux points.

**Exemple**

Soit un triangle ABC. Placer le barycentre $G$ des points pondérés $(A,1)$, $(B,2)$ et $(C,3)$ de deux façon différentes en utilisant l'associativité.

**Formule de réduction :** si $G$ est le barycentre de $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ alors pour tout point $M$ du plan, on a :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

Les coordonnées de $G$ dans le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ vérifient :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$$

Théorème

Généralisation des formules pour le barycentre de 2 points...

Démonstration

**Exemple**

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en $A$ tel que $AB=4$ cm. Déterminer et tracer $\Gamma$, l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$||-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}||=4$$

**Exemple**

Dans le repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, placer les points $A(2;1)$, $B(-1;4)$ et $C(-3;-2)$.
Déterminer les coordonnées du point $G$ barycentre des points $(A,-2)$, $(B,3)$ et $(C,1)$. Placer $G$.

## VI Barycentre de $n$ points

On appelle barycentre du système de points pondérés $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),...,(A_n,\alpha_n)\}$ le point $G$ défini par :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\overrightarrow{0}$$

Avec $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\neq 0$
On peut aussi utiliser la notation avec le signe somme : $\sum$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\overrightarrow{0}$$

Avec

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq\overrightarrow{0}$$

Définition

La notion d'associativité se généralise aussi. Pour trouver le barycentre de $n$ points, on peut remplacer $p$ points, pris parmi les $n$ points par leur barycentre $H$ (s'il existe) affecté de la somme de leurs coefficients.

Théorème

**Exemple**

ABCD est un parallélogramme.
Déterminer et placer le barycentre des points $(A,2)$, $(B,-3)$, "$(C,2)$ et $(D,2)$.

Théorème

**Formule de réduction et coordonnées de $G$.** Si $G$ est le barycentre du système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ et si $M$ est un point du plan, on a les formules suivantes :

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

ou avec le signe somme :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$$

et $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}(\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + ... + \alpha_n\overrightarrow{OA_n})$ Donc

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum \alpha_i}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{OA_i}$$

**Exemple**

ABCD est un rectangle. Déterminer et tracer l'ensemble $\Gamma$, des points $M$ tels que :

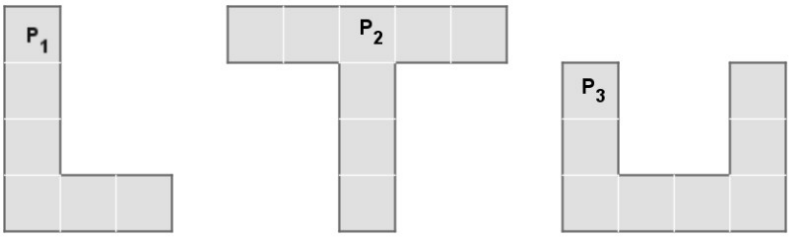
$$||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|| = ||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}||$$

## VII Centre d'inertie d'une plaque homogène

Une plaque homogène consiste en une surface d'épaisseur négligeable dont la masse est également répartie. Le centre d'inertie représente le centre des masses de la plaque.

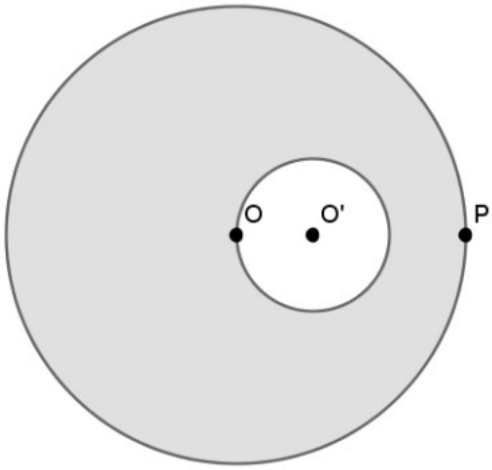
**Exemple**

Pour chacune des plaques homogènes suivantes, construire le centre d'inertie à la règle et au compas. (Les carrés sont identiques).



**Exemple**

Une rondelle a la forme d'un disque évidé suivant le schéma ci-contre pour lequel $OP = 3OO'$ .




a. Trouver la position du centre d'inertie $I$ de la rondelle évidée.

b. On note $M$ la masse de la rondelle évidée. Quelle masse $m$ doit-on placer en $P$ afin que l'ensemble constitué de la rondelle et du point "massique " $P$ ait $O$ pour centre d'inertie ?