Corrigé : Évaluation

Suites numériques

Exercice 1/4 : Règles opératoires sur les limites

Étudier la convergence de chacune des suites (u_n) suivantes.

1. $u_n = n^2 - 2n + 3$
2. $u_n = \dfrac{5}{n^2} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \pi$ avec $n \geq 1$
3. $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 5}{n^3 + n - 2}$
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
5. $u_n = 2 \times \pi^n - 3 \times (-0,5)^n$
6. $u_n = 7^n - 3^{n+1}$

Solution :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pi$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
5. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
6. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 2/4 : Théorème d'encadrement

Étudier la convergence des suites (u_n) suivantes.

1. $u_n = \dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}$ avec $n \geq 1$
2. $u_n = \dfrac{n - \cos(n)}{n+1}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n} \cos\left(\dfrac{n\pi}{5}\right)$ avec $n \geq 1$
4. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k + n^2}$

Solution :

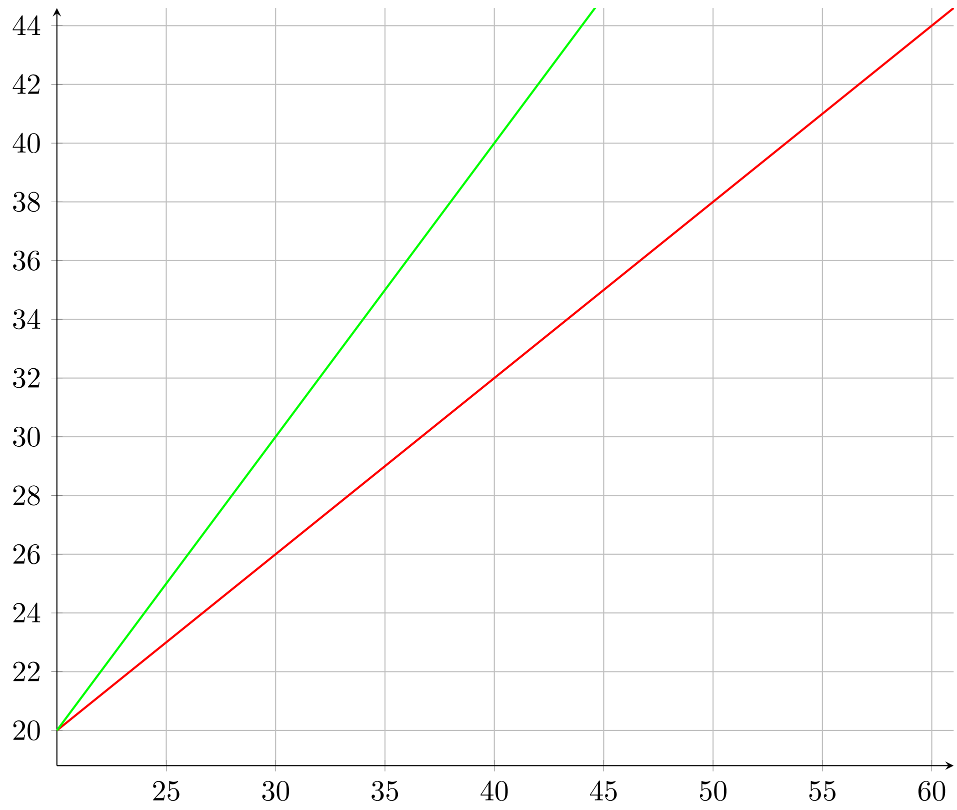
1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice 3/4 : Suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 61$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,6 \times u_n + 8$.

1. Résoudre l'équation $x = 0,6x + 8$. Dans la suite, on notera r la solution de cette équation.
2. On considère la $(v_n) = (u_n - r)$.
   (a) Montrer que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

3. Exprimer u_n en fonction de v_n et déterminer la limite de la suite (u_n)
4. Représenter sur le graphique ci-dessous, u_0, u_1, u_2 et u_3. Votre construction est-elle conforme avec le résultat de la question précédente ? (On a représenté en vert la courbe représentative de la fonction d'équation $y = x$ et en rouge $y = 0.6x + 8$)



Solution :

1. $r = \dfrac{8}{0,4} = 20$
2. On considère la $(v_n) = (u_n - r)$.
   (a) $v_{n+1} = 0,6u_n + 8 - 20$ donc $v_{n+1} = 0,6u_n - 12 = 0,6(u_n - 20) = 0,6v_n$
   Suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = 41$.
   (b) $v_n = 41 \times 0,6^n$
   (c) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$
3. $u_n = 41 \times 0,6^n + 20$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 20$

Exercice 4/4 : Sauvegarde d'une espèce

La population du chabot du lez diminue de 25% par an. La population du 1^{er} mars 2020 était de 3000 individus. Il est décidé d'introduire 400 alevins tous les ans pour enrayer la disparition de l'espèce. On note u_n le nombre d'individus, en milliers, présents dans la rivière le 1^{er} mars $2020 + n$.

1. Expliquer pourquoi $u_0 = 3$ et $u_1 = 2.65$.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Déterminer la suite constante égale à l qui vérifie la même relation de récurrence que (u_n).
4. Montrer que la suite $(u_n - l)$ est géométrique de raison 0.75. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini. Interpréter le résultat pour la situation étudiée.

Solution :

1. Le nombre initial d'individus est 3 000 donc $u_0 = 3$. Puis $u_1 = 0.75 \times 3 + 0.4 = 2.65$.
2. $u_{n+1} = 0.75u_n + 0.4$
3. On cherche l telle que $l = 0.75l + 0.4$ donc $l = 1.6$
4. $u_{n+1} - l = 0.75u_n + 0.4 - 1.6 \iff u_{n+1} - l = 0.75u_n - 1.2 \iff u_{n+1} - l = 0.75(u_n - 1.6)$
   On a donc bien $u_{n+1} - l = 0.75(u_n - l)$ Donc $(u_n - l)$ est une suite géométrique de raison 0.75 et de premier terme $u_0 - l = 3 - 1.6 = 1.4$.
   $u_n = 1.4 \times 0.75^n + 1.6$
5. $0 < 0.75 < 1$ donc la limite de la suite (u_n) lorsque n tend ver l'infini est 1.6. La population de poissons se stabilisera à long terme autour de 1600 individus.