Corrigé : Exercices

Dérivation

Exercice 1/28

Pour chaque question, préciser l'ensemble de dérivation et calculer la dérivée de la fonction f définie ci-dessous.

1. $f(x) = -\dfrac{3x^4 - 8x}{4} - 6\sqrt{x}$
2. $f(x) = -\dfrac{3}{2x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{8}{5x^3}$
3. $f(x) = 3\cos(x) - \dfrac{5\sin(x)}{2}$
4. $f(x) = (4x^2 - x)(3x - 1)$
5. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5}{3x + 1}$
6. $f(x) = xe^x$
7. $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$
8. $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$
9. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$

Solution :

1. $f'(x) = 3x^3 - 2$
2. $f'(x) = \dfrac{3}{2x^3} - \dfrac{8}{x^3} + \dfrac{24}{5x^4}$
3. $f'(x) = -3\sin(x) - \dfrac{5\cos(x)}{2}$
4. $f'(x) = 36x^2 - 14x + 1$
5. $f'(x) = \dfrac{6x^2 + 4x + 15}{(3x + 1)^2}$
6. $f'(x) = (1 + x)e^x$
7. $f'(x) = -\dfrac{1}{6x\sqrt{x}}$
8. $f'(x) = (x^2 + 5x + 4)e^x$
9. $f'(x) = \dfrac{(x - 3)e^x}{x^4}$

Exercice 2/28

Pour chaque question, préciser l'ensemble de dérivation et calculer la dérivée de la fonction f définie ci-dessous.

1. $f(x) = (3x^2 + x - 1)^4$
2. $f(x) = 5\sqrt{x^2 - 1}$
3. $f(x) = \dfrac{4e^{-x}}{5} + e^{3x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{4}{3(2x + 1)^5}$
5. $f(x) = \left(\dfrac{2x - 1}{x - 5}\right)^3$
6. $f(x) = x\sqrt{2 + 3x^2}$
7. $f(x) = 4\cos(3x)$
8. $f(x) = x^2 \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$
9. $f(x) = \left(\sin\left(\dfrac{3}{x}\right)\right)^2$

Solution :

1. $f'(x) = 4(6x+1)(3x^2+x-1)^3$
2. $f'(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2-1}}$
3. $f'(x) = -\dfrac{4}{5}e^{-x} + 6xe^{3x^2}$
4. $f'(x) = \dfrac{-40}{3(2x+1)^6}$
5. $f'(x) = -27\dfrac{(2x-1)^2}{(x-5)^4}$
6. $f'(x) = \dfrac{6x^2+2}{\sqrt{2+3x^2}}$
7. $f'(x) = -12\sin(3x)$
8. $f'(x) = (2x+1)\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$
9. $f'(x) = -\dfrac{6}{x^2}\cos\left(\dfrac{3}{x}\right)\sin\left(\dfrac{3}{x}\right)$

Exercice 3/28

1. Soit $f\ :\ x \longmapsto (x^2-9)\sqrt{3-x}$. Préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f et étudier la dérivabilité de f en 3.
2. Soit $g\ :\ x \longmapsto |x|$, la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$. Expliciter le taux d'acroissement de g en 0 pour $x<0$ et $x>0$, puis montrer que g n'est pas dérivable en 0.

Solution :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 0$
2. Le taux d'accroissement a des limites différentes en 0^+ et en 0^- la fonction n'est donc pas dérivable en 0.

Exercice 4/28

Soit $r\ :\ x \longmapsto \sqrt{x}$ la fonction racine, définie sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que r n'est pas dérivable en 0. Que peut-on dire de sa courbe au point $(0;0)$?
2. Soit $c\ :\ x \longmapsto x^2$ et la fonction produit $p\ :\longmapsto (c.r)(x) = c(x).r(x) = x^2\sqrt{x}$. Étudier la dérivabilité de p en 0.
3. Pour qu'une fonction produit $u.v$ soit dérivable en x_0, est-il nécessaire que u et v soient dérivables en x_0 ?

Solution :

1. $\tau(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d'où le résultat...
2. $\tau(x) = x\sqrt{x}$ donc dérivable en 0...
3. D'après le cours, si u et v sont dérivables en x_0, alors $u.v$ est dérivable en x_0. La réciproque est fausse.

Exercice 5/28

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous sur $\mathbb{R}$:

– Déterminer la fonction dérivée et étudier son signe sur $\mathbb{R}$
– Dresser le tableau de variations de la fonction (préciser les limites aux bornes).
– Préciser les extremums et les tangentes horizontales éventuels.

1. $f(x) = x^3 - 12x - 8$
2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
3. $f(x) = (2x+4)e^x$
4. $f(x) = x^2.e^{-2x}$

Pour la première fonction, donner l'équation de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 0.
Pour la deuxième, donner l'équation de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse -1.

Solution :

1. $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$ maximum local en 12 et minimum local -20
2. $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ maximum 1 et minimum 0.
3. $f'(x) = (2x+6)e^x$ minimum $-2e^{-3}$

Exercice 6/28

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^2+1)^3$$

Solution :
Soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (2x^2+1)^3$. On pose u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$ et v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 2x^2+1$.
$f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = 3 \times (2x^2+1)^2 \times 4x = 12x(2x^2+1)^2$

Exercice 7/28

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 3]$ par :

$$f(x) = (3-x)\sqrt{3-x}$$

Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty; 3]$.

Solution : f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ comme produit de fonctions continues (la fonction racine carrée étant continue).
Par composition et produit de fonctions $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
$f(3) = 0$.
$5 \in [0; +\infty[$. D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty; 3]$.

Exercice 8/28

Étudier la convexité de la fonction $f \ : \ x \longmapsto x^3 + x^2 - 2x + 1$

Solution : $f''(x) = 6x + 2$ la fonction est donc convexe sur $[-\dfrac{1}{3}; +\infty[$ et concave sur $]-\infty; -\dfrac{1}{3}]$

Exercice 9/28

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de dérivabilité, puis calculer la fonction dérivée.

1. $f_1(x) = (5x^2+1)^7$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{f_1(x)}$
3. $f_3(x) = \sqrt{x^4+1}$
4. $f_4(x) = e^{-5x+1}$
5. $f_5(x) = \sqrt{e^x+2}$
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Solution :

1. $f_1(x) = 70x \times (5x^2+1)^6$
2. $f_2(x) = -\dfrac{70x}{(5x^2+1)^8}$
3. $f_3(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$
4. $f_4(x) = -5e^{-5x+1}$
5. $f_5(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+2}}$
6. $f_6(x) = \dfrac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

Exercice 10/28

Soit $f \ : \ x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer le tableau de variations de f et en déduire que : pour tout $x \in]0;+\infty[,\ x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ et pour tout $x \in]-\infty;0[,\ x + \dfrac{1}{x} \leq -2$.

Solution : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

-2 est le maximum local de la fonction f sur $]-\infty;0[$, donc $\forall x \in]-\infty;0[,\ f(x) \leq -2$.
2 est le minimum local de la fonction f sur $]0;+\infty[$, donc $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) \geq 2$.

Exercice 11/28

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geq 1 + x$.
2. Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[,\ \exp(x) \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
3. En déduire que $\forall x > 0,\ \dfrac{\exp(x)}{x} > \dfrac{x}{2}$, puis déterminer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\exp(x)}{x}$.

Solution :

1. Soit f la fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x)$.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = e^x > 0$ la fonction est donc convexe sur $\mathbb{R}$, elle est donc au-dessus de toutes ses tangentes, et donc de sa tangente en 0 d'équation $y = 1 + x$. D'où le résultat.
2. Étude de $f(x) = \exp(x) - \dfrac{x^2}{2} - 1 - x$.
3. Utiliser la question 2.

Exercice 12/28

Pour chaque question, étudier la limite en α de la fonction f définie ci-dessous en écrivant $f(x)$ sous la forme $\dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$, où la fonction dérivable g est à préciser.

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$ en $\alpha=2$
2. $f(x)=\dfrac{(2x+1)^4-1}{x+1}$ en $\alpha=-1$
3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}-2\sin(x)}{3x-\pi}$ en $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$
4. $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x-1}$ et $\alpha=1$

Solution :

1. $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$ donc $\ell=\dfrac{3}{4}$
2. $f'(x)=8\times(2x+1)^3$ donc $\ell=-8$
3. $f'(x)=\cos(x)$ donc $\ell=-\dfrac{1}{3}$
4. $f(x)=1$

Exercice 13/28

Pour chaque question, déterminer la convexité/concavité de la fonction f définie sur I ci-dessous.

1. $f(x)=x^2+5x+3e^x$ avec $I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=3\cos(x)-\sin(x)$ avec $I=[-\dfrac{\pi}{2};0]$
3. $f(x)=5\sqrt{x}-4e^x+2$ avec $I=\mathbb{R}_+^*$

Solution :

1. convexe
2. concave
3. concave

Exercice 14/28

Étudier la convexité/concavité des quatre fonctions de l'exercice 5 et préciser les points d'inflexion de leurs courbes.

Solution :

1. $f''(x)=6x$ convexe sur $]0;+\infty[$ et concave sur $]-\infty;0[$ point d'inflexion $(0;-8)$.
2. $f''(x)=\dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$ la fonction est donc concave sur $[-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}]$ et convexe sur $]-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}]$ et $[\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty[$. Points d'inflexions d'abscisses respectives $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
3. $f''(x)=(2x+8)e^x$ la fonction est concave sur $]-\infty;-4]$ et convexe sur $[-4;+\infty[$. Sa courbe a un point d'inflexion de coordonnées $(-4;-4e^{-4})$.
4. $f''(x)=2(2x^2-4x+1)e^{-2x}$ donc f est concave sur $[x_1;x_2]$ avec x_1 et x_2 racines du trinôme. La fonction est convexe sur $]-\infty;x_1]$ et sur $[x_2;+\infty[$. Points d'inflexions d'abscisses x_1 et x_2.

Exercice 15/28

En utilisant l'inégalité des tangentes, montrer les inégalités suivantes :

1. $x \in \mathbb{R},\ e^x \geq e.x$
2. $n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^+,\ x^{n+1} \geq (n+1)x - n$
3. $x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x - 1$
4. $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ \sin(x) \leq x$

Solution :

1. $x \longmapsto e^x$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, elle est donc au-dessus de toutes ses tangentes, et donc de sa tangente en 1 : $e^x \geq e^1(x-1) + e^1$
2. $x \longmapsto x^{n+1}$ est une fonction convexe sur $[0; +\infty[$, elle est donc au-dessus de toutes ses tangentes, et donc de sa tangente en 1 : $x^{n+1} \geq (n+1)1^n(x-1) + 1^{n+1}$
3. $x \longmapsto \ln(x)$ est une fonction concave sur $]0; +\infty[$, elle est donc en-dessous de toutes ses tangentes, et donc de sa tangente en 1 : $\ln(x) \leq \frac{1}{1}(x-1) + \ln(1)$.
4. $x \longmapsto \sin(x)$ est une fonction concave sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, elle est donc en-dessous de toutes ses tangentes, et donc de sa tangente en 0 : $\sin(x) \leq \cos(0)(x-0) + \sin(0)$

Exercice 16/28

On veut montrer que, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$

1. Montrer que la fonction sin est concave sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. En déduire l'inégalité proposée.

Solution :

1. Dérivée seconde négative sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
2. Inégalité des cordes : $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$
   $f(\lambda\frac{\pi}{2} + (1-\lambda)\times 0) \geq \lambda f(\frac{\pi}{2}) + (1-\lambda)f(0)$
   $\sin(\lambda\frac{\pi}{2} + (1-\lambda)\times 0) \geq \lambda\sin(\frac{\pi}{2}) + (1-\lambda)\sin(0)$
   $\sin(\lambda\frac{\pi}{2}) \geq \lambda$
   En posant $\lambda = x \times \frac{2}{\pi}$ on obtient l'inégalité demandée.

Exercice 17/28

1. Déterminer si les fonctions suivantes définies sur un intervalle I à préciser, sont convexes, concaves ou non.
   (a) $f_1(x) = 2x + 1$
   (b) $f_2(x) = x^4$
   (c) $f_3(x) = x^5$
   (d) $f_4(x) = \sqrt{x}$
   (e) $f_5(x) = \frac{1}{x}$
2. Dans un repère, on considère la courbe $\mathcal{C}\ :\ y = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$.
   Démontrer que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion.

Solution :

1. (a) $f_1(x) = 2x+1$ à la fois convexe et concave sur $\mathbb{R}$
   (b) $f_2(x) = x^4$ convexe
   (c) $f_3(x) = x^5$ concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$
   (d) $f_4(x) = \sqrt{x}$ concave sur $]0;+\infty[$
   (e) $f_5(x) = \dfrac{1}{x}$ concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$
2. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$ alors $f''(x) = 6x - 6$. Tab de signes d'une fonction affine croissante. Point d'inflexion en $(-1;-2)$.

Exercice 18/28

Étudier le sens de variation de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. f est définie sur $[2,5;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-5}$.
2. g est définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = (2\sqrt{x}-1)^5$
3. h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{3x^2+1}$

Solution :

1. croissante
2. croissante
3. décroissante sur $]-\infty;0]$ puis croissante sur $[0;+\infty[$

Exercice 19/28

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Démontrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en 0.
   (b) En déduire l'inégalité pour tout réel x,

$$e^x \geq x+1$$

Solution :

1. $(e^x)'' = e^x > 0$
2. (a) $y = x+1$
   (b) la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, elle est donc au-dessus de toutes ses tangentes : $e^x \geq x+1$

Exercice 20/28

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{x+2}$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x + 1$$

   (a) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation complet.

   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; -2]$, que l'on notera α.
   Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

   (c) L'équation $g(x) = 0$ admet-elle d'autres solutions dans $\mathbb{R}$?

4. Dresser un tableau indiquant, en fonction de x, le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

Solution :

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$
   $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

2. $f'(x) = \dfrac{(3x^2+2x+1)(x+2) - (x^3+x^2+x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^3+7x^2+4x+1}{(x+2)^2}$.

3. (a)

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
variation de g	$-\infty$		5		$\frac{10}{27}$		$+\infty$

   (b) Corollaire TVI $-2,86 > \alpha > -2,87$

   (c) Non

4.

x	$-\infty$		α		-2		$+\infty$
variation de f		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
signe de f'	$+\infty$		$f(\alpha)$		$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$		$+\infty$

Exercice 21/28

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 3x$$

1. (a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (b) Calculer pour tout réel x, $f'(x)$. En remarquant de 1 est racine de $f'(x)$, factoriser au maximum $f'(x)$.

   (c) En déduire les variations de f.

2. Calculer pour tout réel x, $f''(x)$. En déduire les intervalles où f est convexe, concave et les points d'inflexion de sa courbe représentative dans un repère du plan.

Solution :

1. (a) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$
   (b) $f'(x) = 4x^3 - 7x + 3 = 4(x-1)(x+\dfrac{3}{2})(x-\dfrac{1}{2})$
   (c) f est croissante sur $[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}]$ et sur $[1; +\infty[$. f est décroissante sur $[-\infty; -\dfrac{3}{2}]$ et sur $[\dfrac{1}{2}; 1]$.
2. $f''(x) = 12x^2 - 7 = (\sqrt{12}x - \sqrt{7})(\sqrt{12}x + \sqrt{7})$.
   La fonction f est convexe sur l'intervalle $\left]-\infty; -\sqrt{\dfrac{12}{7}}\right[$ et sur l'intervalle $\left]\sqrt{\dfrac{12}{7}}; +\infty\right[$.
   La fonction f est concave sur l'intervalle $\left]-\sqrt{\dfrac{12}{7}}; \sqrt{\dfrac{12}{7}}\right[$.
   Sa courbe représentative admet deux points d'inflexion : le point de la courbe d'abscisse $-\sqrt{\dfrac{12}{7}}$ et le point de la courbe d'abscisse $\sqrt{\dfrac{12}{7}}$.

Exercice 22/28

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

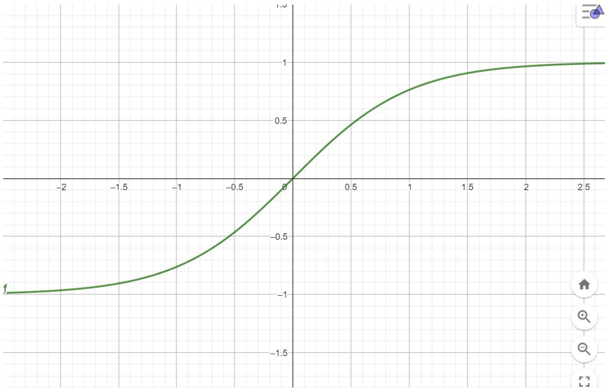
1. Donner la limite de f est $\pm\infty$.
2. Calculer pour tout réel x, $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
3. Calculer et factoriser, pour tout réel x, $f''(x)$.
4. En déduire les intervalles où f est convexe et concave et le(s) point(s) d'inflexion de sa courbe représentative.

Solution :

1. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$
2. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ donc f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.
3. $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(-1 + 2x^2) = 2e^{-x^2}(-1 + \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x)$
4. f est convexe sur $]-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}[$ et sur $]\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty[$.
   f est concave sur $]-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}[$.
   Deux points d'inflexion d'abscisses $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 23/28 : Problème : tangente hyperbolique

Dans un repère du plan ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f.



1. D'après la courbe, donner le sens de variations de f, les limites en $\pm\infty$, les intervalles où f est concave/convexe et le(s) point(s) d'inflexion de la courbe.
2. La fonction représentée est la fonction appelée tangente hyperbolique, notée tanh définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

   (a) Établir l'encadrement de $\tanh x$ observé à la question 1.

   (b) Démontrer que pour tout réel x,

$$\tanh x = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

   En déduire la limite de tanh en $+\infty$.

   (c) Démontrer que pour tout réel x,

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

   En déduire la limite de tanh en $-\infty$.

   (d) Montrer que, pour tout réel x, $\tanh'(x) = 1 - (\tanh(x))^2$ et en déduire les variations de tanh.

   (e) Calculer pour tout réel x, $\tanh''(x)$.
   En déduire les intervalles où tanh est convexe et concave et le(s) point(s) d'inflexion de sa courbe représentative.

Solution :

1.
2. (a) $-e^{-x} < e^x - e^{-x} < e^x$ donc $\dfrac{-e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$ car $e^x + e^{-x} \neq 0$

   (b) $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

   (c) Démontrer que pour tout réel x, $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

   (d) $\tanh' x = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - (\tanh x)^2$
   f est croissante sur $\mathbb{R}$.

   (e) f est convexe sur $]-\infty; 0[$ et concave sur $]0; +\infty[$. Point d'inflexion d'abscisse $x = 0$.

Exercice 24/28 : Vrai ou faux

1. Si deux fonctions f et g ne sont pas dérivables en x_0, alors la fonction produit $f \times g$ n'est pas dérivable en x_0.
2. La fonction inverse est srtictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car sa dérivée est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$.
3. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I telles que pour tout $x \in I,\ f(x) \leq g(x)$ alors pour tout $x \in I,\ f'(x) \leq g'(x)$.
4. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I telles que pour tout $x \in I\ f'(x) \leq g'(x)$ alors pour tout $x \in I,\ f(x) \leq g(x)$.
5. Si une fonction dérivable est strictement croissante sur un intervalle I, alors sa fonction dérivée est strictement positive sur I.
6. La courbe d'une fonction dérivable peut admettre une tangente horizontale en un point sans que ce point sans que ce point corresponde à un extremum de la fonction.
7. Si une fonction est dérivable en x_0, sa courbe représentative est toujours située soit au-dessous, soit au-dessus de sa tangente, au voisinage du point d'abscisse x_0.
8. La somme de deux fonctions convexes sur un intervalle I est une fonction convexe sur I.
9. Le produit de deux fonctions convexes sur un intervalle I est une fonction convexe sur I.
10. La courbe d'une fonction peut admettre une infinité de points d'inflexion.

Exercice 25/28 : **

1. Soit x_0 un réel fixé et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x_0)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$. On veut montrer que $f'(x_0) = 0$.
   (a) Étudier le signe de $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ en distinguant les cas $x < x_0$ et $x > x_0$.
   (b) En déduire le signe des limites à gauche et à droite du taux d'accroissement de f en x_0 puis conclure.
2. **Application :** soit $f\ :\ x \longmapsto ax^2 + bx + 2$ une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer les réels a et b sachant que $\Omega(1;3)$ est le sommet de la parabole représentative de f.

Exercice 26/28 : *

Pour chaque question, déterminer la dérivée $n-$ième sur I de f définie ci-dessous.

1. $f(x) = e^{2x+1}$ avec $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $I = \mathbb{R}^*$

Exercice 27/28 : *

Soit $f\ :\ x \longmapsto \exp(x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la dérivée $n-$ième ($n \in \mathbb{N}$) de f sur $\mathbb{R}$ est de la forme $f^{(n)}(x) = P_n(x) \exp(x^2)$ où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

Exercice 28/28 : *

1. En reconnaissant la limite d'un taux d'accroissement, démontrer que

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1 \text{ et } \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

2. En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x^2}-1}{4x^2}$
3. Transformer les écritures de $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{3x}$ et de $g(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{x}$ pour faire apparaître une forme $\dfrac{\sin(y)}{y}$ (respectivement $\dfrac{e^y-1}{y}$), puis déterminer leurs limites en 0.
4. Déterminer la limite en $\alpha = +\infty$ de $f(x) = x^2.\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.