Corrigé : Exercices

Récurrence

Exercice 1/21

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$ et $u_0 = 0$ est strictement croissante.

Solution : Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $u_{n+1} \geq u_n$

Initialisation : rang $n = 0$.
$u_1 = \sqrt{3} > 0 = u_0$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff u_{n+1} > u_n \\ &\iff u_{n+1} + 3 > u_n + 3 \\ &\iff \sqrt{u_{n+1} + 3} > \sqrt{u_n + 3} \\ &\iff u_{n+2} > u_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 2/21

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 - 2^n$.

Solution : Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $u_n = 3 - 2^n$.

Initialisation : rang $n = 0$.
$u_0 = 2 = 3 - 2^0$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff u_n = 3 - 2^n \\ &\iff 2u_n = 2 \times (3 - 2^n) \\ &\iff 2u_n - 3 = 2 \times (3 - 2^n) - 3 \\ &\iff u_{n+1} = 3 - 2^{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 3/21

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 10$, on a $2^n \geq 100n$.

Solution : Soit pour tout $n \geq 10$ la proposition $P(n)$ suivante : $2^n \geq 100n$

Initialisation : rang $n = 10$.
$u_10 = 2^{10} = 1024 \geq 1000$ La propriété est donc vraie au rang $n = 10$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\Longleftrightarrow 2^n \geq 100n \\ &\Longrightarrow 2^{n+1} \geq 200n \geq 100n + 100 = 100(n+1) \end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 10$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 10,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 4/21

Démontrer l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Solution : Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : rang $n = 0$.
$\dfrac{0 \times (0+1)}{2} = 0$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \\ &\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} k \ + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} \\ &\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.

D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 5/21

Démontrer l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q \neq 0$.

Solution : Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Initialisation : rang $n = 0$.
$\dfrac{1-q}{1-q} = 1 = q^0$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned}
P(n) \text{ vraie } &\iff \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}
\end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 6/21

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n - 5$. Démontrer que pour tout n, $u_n = 2^n + 5$.

Solution : Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $u_n = 2^n + 5$

Initialisation : rang $n = 0$.
$u_0 = 6 = 2^0 + 5$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned}
P(n) \text{ vraie } &\iff u_n = 2^n + 5 \\
&\iff 2u_n - 5 = 2^{n+1} + 10 - 5 \\
&\iff u_{n+1} = 2^{n+1} + 5
\end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.

D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 7/21

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Démontrer que pour tout n, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Solution : Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$

Initialisation : rang $n = 0$.
$u_0 = 2 = \dfrac{2}{2 \times 0 + 1}$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff u_n = \frac{2}{2n+1} \\ &\iff u_n + 1 = \frac{2+2n+1}{2n+1} \\ &\iff \frac{1}{u_n+1} = \frac{2n+1}{2n+3} \\ &\iff \frac{u_n}{u_n+1} = \frac{(2n+1)\times 2}{(2n+3)\times(2n+1)} \\ &\iff u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} \end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 8/21

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{0.5u_n + 8}$.
Démontrer que pour tout n, $0 \leq u_n \leq 4$.

Solution : Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $0 \leq u_n \leq 4$

Initialisation : rang $n = 0$.
$u_0 = 0$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff 0 \leq u_n \leq 4 \\ &\iff 8 \leq 0.5u_n + 8 \leq 10 \\ &\iff 2\sqrt{2} \leq \sqrt{0.5u_n+8} \leq \sqrt{10} \\ &\Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4 \end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.

D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 9/21

Démontrer les formules suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Solution :

1. Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   Initialisation : rang $n = 0$.
   $\dfrac{0 \times (0+1)(2 \times 0+1)}{6} = 0$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

   Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned}
P(n) \text{ vraie } &\iff \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(6n+6+2n^2+n)}{6} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

   Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
   D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
   La propriété est ainsi démontrée.

2. Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   Initialisation : rang $n = 0$.
   $\left(\dfrac{0 \times (0+1)}{2}\right)^2 = 0$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

   Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique

$P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned}
P(n) \text{ vraie } &\iff \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(4n+4+n^2)}{4} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n=0$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 10/21

Démontrer la proposition suivante : $\forall n \geq 2,\ 5^n \geq 4^n + 3^n$

Solution : Soit pour tout $n \geq 2$ entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $5^n \geq 4^n + 3^n$

Initialisation : rang $n=2$.
$5^2 = 25 = 4^2 + 3^2$ La propriété est donc vraie au rang $n=2$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned}
P(n) \text{ vraie } &\iff 5^n \geq 4^n + 3^n \\
&\Longrightarrow 5^{n+1} \geq 5 \times 4^n + 5 \times 3^n \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n=2$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 2,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 11/21

Démontrer que pour tout n entier naturel, $8^n - 1$ est divisible par 7.

Solution : Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $8^n - 1 = 7k$ avec k un entier.

Initialisation : rang $n=0$.
$8^0 - 1 = 0 \times 7$ La propriété est donc vraie au rang $n=0$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+$

1) vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff 8^n - 1 = 7k \\ &\iff 8^n = 7k + 1 \\ &\iff 8^{n+1} = 7 \times 8k + 8 \\ &\iff 8^{n+1} = 7 \times 8k + 7 + 1 \\ &\iff 8^{n+1} = 7 \times (8k+1) + 1 \\ &\iff 8^{n+1} - 1 = 7 \times (8k+1) \\ &\iff 8^{n+1} - 1 = 7 \times k' \quad \text{En posant} \quad k' = 8k+1 \end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 12/21 : Récurrence double (hors programme)

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

Solution : Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $u_n = 1 + 2^n$.

Initialisation : rang $n = 0$ et $n = 1$.
$u_0 = 1 + 2^0 = 2$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.
$u_1 = 1 + 2^1 = 3$ La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+2)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ et } P(n+1) \text{ vraies } &\iff u_n = 1 + 2^n \text{ et } u_{n+1} = 1 + 2^{n+1} \\ &\iff 3u_{n+1} - 2u_n = 3 + 3 \times 2^{n+1} - 2 - 2^{n+1} \\ &\iff u_{n+2} = 1 + 2^{n+1} \times (3-1) \\ &\iff u_{n+2} = 1 + 2^{n+2} \end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies $\Longrightarrow P(n+2)$ vraie. La propriété est donc héréditaire.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 13/21 : Exercices supplémentaires

On définit la suite (u_n) par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.
Démontrer que pour $n > 0,\ u_n = n^2$

Solution : Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $u_n = n^2$.

Initialisation : rang $n = 1$.
$u_1 = 1$ et $1^2 = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+$

1) vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff u_n = n^2 \\ &\iff u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 \\ &\iff u_{n+1} = (n+1)^2 \end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 1$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 1,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 14/21

1. Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$
   (a) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. Soit une suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n + 4$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geq v_n$.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Solution :

1. (a) Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $u_{n+1} \leq u_n$.
   Initialisation : rang $n = 0$.
   $u_0 = 8$ et $u_1 = 5$ donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff u_{n+1} \leq u_n \\ &\iff \frac{1}{4}u_{n+1} + 3 \leq \frac{1}{4}u_n + 3 \\ &\iff u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

   Conclusion : La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
   D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
   La propriété est ainsi démontrée.

   (b) La suite (u_n) est donc décroissante.
2. (a) Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $v_{n+1} \geq v_n$.
   Initialisation : rang $n = 0$.
   $v_0 = 3$ et $v_1 = 5$ donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff v_{n+1} \geq v_n \\ &\iff \frac{1}{3}v_{n+1} + 4 \geq \frac{1}{3}v_n + 4 \\ &\iff v_{n+2} \geq v_{n+1} \end{aligned}$$

   Conclusion : La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
   D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
   La propriété est ainsi démontrée.

   (b) La suite (v_n) est donc décroissante.

Exercice 15/21

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Solution : Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Initialisation : rang $n = 0$.
$\dfrac{0 \times (0+1)(0+2)}{3} = 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned}
P(n) \text{ vraie } &\iff \sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3} \\
&\iff \sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}
\end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 16/21 : Initialisation

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 12$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la proposition : « $u_n = 6$ ».

1. Vérifier que $P(0)$ et $P(1)$ sont fausses.
2. Montrer que $P(n)$ est héréditaire.
3. Que peut-on en conclure ?

Solution :

1. $P(0)$ est fausse de manière évidente et $u_1 = -6$ donc $P(1)$ est également fausse.
2. Supposons $P(n)$ vraie et montrons que $P(n = 1)$ est alors également vraie.

$$\begin{aligned}
P(n) \text{ vraie } &\iff u_n = 6 \\
&\iff u_{n+1} = 6 \times 3 - 12 = 6
\end{aligned}$$

   La propriété est donc héréditaire.
3. Il est indispensable d'initialiser correctement une récurrence.

Exercice 17/21

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 3,\ (n+1)^2 \geq 2n+6$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ n^2+n+2$ est un nombre pair.
3. Démontrer que pour tout réel $x \geq 3,\ (x-1)^2 \geq x+1$.

Solution :

1. $(n+1)^2 \geq 2n+6 \iff n^2-5 \geq 0$ or $n \geq 3$. D'où le résultat.
2. Disjonction des cas pour n pair et n impair.
3. $(x-1)^2 \geq x+1 \iff x(x-3) \geq 0$ or $x \geq 3$. D'où le résultat.

Exercice 18/21

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3-2x^2+x-2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer $f'(x)$ puis étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer u_1
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} =\leq u_n$. En déduire le sens de variation de (u_n).

Solution :

1. $f'(x) = 6x^2-4x+1$. Or $\Delta < 0$ donc $f'(x) \geq 0$ donc la fonction f est croissante.
2. (a) $u_1 = -1$
   (b) Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $u_{n+1} \leq u_n$.
   Initialisation : rang $n = 0$.
   $u_1 \leq u_0$ donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff u_{n+1} \leq u_n \\ &\iff f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \\ &\iff u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

   Conclusion : La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
   D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
   La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 19/21

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 0.7$ et pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.
   (a) Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.
   (b) En déduire que si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [0;1]$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n,\ 0 \leq u_n \leq 1$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Solution :

1. (a) $f'(x) = \dfrac{3(1+2x) - 3x \times 2}{(1+2x)^2} = \dfrac{3}{(1+2x)^2}$ la fonction f est donc croissante.
   (b) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ d'où le résultat.
2. Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $0 \leq u_n \leq 1$.
   Initialisation : rang $n = 0$.
   $u_0 = 0,7$ donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.
   $$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff 0 \leq u_n \leq 1 \\ &\iff f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \\ &\iff 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$
   Conclusion : La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
   D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
   La propriété est ainsi démontrée.
3. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ la suite est croissante.

Exercice 20/21

1. Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = 2u_n - 1$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + 1$.
2. Soit une suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} = \dfrac{1+2v_n}{2+v_n}$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq 1$.
3. Soit une suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n,\ w_{n+1} = \sqrt{1+w_n}$.
   Démontrer que la suite (w_n) est croissante.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel $n,\ 4^n \geq 1 + 3n$.

Solution :

1. Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $u_n = 2^{n+1} + 1$.
   Initialisation : rang $n = 0$.
   $2^1 + 1 = 3$ donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.
   $$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff u_n = 2^{n+1} + 1 \\ &\iff 2u_n - 1 = 2^{n+2} + 2 - 1 \\ &\iff u_{n+1} = 2^{n+2} + 1 \end{aligned}$$
   Conclusion : La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
   D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
   La propriété est ainsi démontrée.
2. Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $0 \leq v_n \leq 1$.
   Initialisation : rang $n = 0$.
   $P(0)$ est vraie de manière évidente.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff 0 \leq v_n \leq 1 \\ &\iff 2 \leq 2 + v_n \leq 3 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff 0 \leq v_n \leq 1 \\ &\iff 1 \leq 1 + 2v_n \leq 3 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \leq \frac{1+2v_n}{2+v_n} \leq \frac{3}{3} \\ &\implies 0 \leq v_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

3. Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $w_{n+1} \geq w_n$.

Initialisation : rang $n = 0$.
$w_0 = 1$ et $w_1 = \sqrt{2}$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff w_{n+1} \geq w_n \\ &\iff \sqrt{1+w_{n+1}} \geq \sqrt{1+w_n} \\ &\implies w_{n+2} \geq w_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

4. Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $4^n \geq 1 + 3n$.

Initialisation : rang $n = 0$.
$4^0 = 1$ et $w_1 = 1 + 3 \times 0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff 4^n \geq 1 + 3n \\ &\iff 4^{n+1} \geq 4 + 12n \\ &\implies 4^{n+1} \geq 4 + 3n = 1 + 3(n+1) \end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 21/21 : Récurrence forte (hors programme)

Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier.

Solution : Soit pour tout $n \geq 2$ entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : « n admet un diviseur premier ».

Initialisation : rang $n = 2$.
2 est un nombre premier donc P(2) est vraie.

Hérédité : Supposons $P(k)$ vraie pour tous les $k \in [2; n]$ avec un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

- Si $n+1$ est un nombre premier alors le résultat est immédiat.
- Si $n+1$ n'est pas un nombre premier alors il est divisible par un certain $m \in [[2, n]]$. Or m est divisible par un nombre premier p d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $n+1$ est également divisible par ce nombre premier p. D'où $n+1$ admet un diviseur premier.

Conclusion : La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 2$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 2,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.