Corrigé : Exercices

Logarithme népérien

Exercice 1/32

Effectuer le calcul suivant :

$$A = \ln\left(e^4\sqrt{e}\right) + \ln\left(e^2\right)\ln\left(\frac{1}{e^{-9}}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^{-7}}}\right)$$

On donnera la réponse sous la forme la plus simple possible.

Solution : $A = 26$

Exercice 2/32 : Vrai ou faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. $\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln\left(\frac{3}{10}\right) - \ln(\sqrt{3}) + \ln\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) = 0$.
2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
   La suite $(\ln(u_n))$ est arithmétique.
3. L'ensemble solution de l'inéquation $\ln(2-3x) < 2$ est $\left]\frac{2-e^2}{3}; +\infty\right[$.
4. La courbe d'équation $y = 2 + \frac{\ln(x)}{x}$ dans un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.
5. L'équation $e^{3x\ln(2)} - \frac{\ln(3)}{x\ln(2)} = 26$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$, qui vaut $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

Solution :

1. $\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln\left(\frac{3}{10}\right) - \ln(\sqrt{3}) + \ln\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) = \ln\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\ln 3 + \ln 8 - \frac{1}{2}\ln 3 = 0$. Donc Vrai
2. Vrai
3. Faux
4. Vrai asymptote horizontale $y = 2$
5. Vrai

Exercice 3/32

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln\left((3-2\sqrt{2})^7\right)+\ln\left((3+2\sqrt{2})^7\right)$
2. $-3\ln\left(e^{-1}\right)-2\ln\left(e^3\right)+2\ln\left(e\sqrt{e}\right)$
3. $\ln\left(\sqrt{50}\right)+\ln(8)-3\ln(5)+\ln\left(4^{-1}\right)$
4. $2\ln\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)+\ln\left(\frac{3}{5}\right)$

Solution :

1. $\ln\left(1^7\right)=0$
2. $-3+3=0$
3. $\ln(5)+\frac{1}{2}\ln(2)+3\ln(2)-3\ln(5)-2\ln(2)=\frac{3}{2}\ln(2)-2\ln(5)$
4. $\ln\left(\frac{5}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{5}\right)=0$

Exercice 4/32

1. Résoudre dans $]1;+\infty[$ l'équation :

$$\ln(x-1)+\ln(x+1)+\ln(x+1)=\ln\left(x^2-1\right)-\ln(0,25)$$

2. Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation :

$$2\ln(x)-\ln(x+1)=2\ln(2)$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$2e^{2x}\geq 6$$

Solution :

1. $x=3$
2. $S=\{2+2\sqrt{2};2-2\sqrt{2}\}$
3. $S=\left[\frac{\ln(3)}{2};+\infty\right[$

Exercice 5/32

Effectuer le calcul suivant :

$$A=\ln\left(\frac{e^{-4}}{2}\right)+\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$$

On donnera la réponse sous la forme la plus simple possible.

Solution : $A=-4-\ln(2)-3=1-\ln(2)$

Exercice 6/32

1. Quel est l'ensemble des solutions de

$$2^x\leq 8$$

2. Quel est l'ensemble des solutions de

$$\ln(x)\leq 5$$

Solution :

1. $S =]-\infty; 3]$
2. $S =]0; e^5]$

Exercice 7/32

Quel est l'ensemble des solutions de

$$16 \times 10^x \geq 3$$

Solution :

$S = \left[\log\left(\frac{3}{16}\right); +\infty\right[$

Exercice 8/32

Quel est l'ensemble des solutions de

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^x \leq 3$
2. $3\ln x - 1 \leq 5$

Solution :

1. $S = \left[\frac{\ln(3)}{\ln(3) - \ln(4)}; +\infty\right[$
2. $S =]0; e^2]$

Exercice 9/32

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\ln(x+1) \leq 7$
2. $2\ln(2x+5) > \ln(9)$
3. $(e^x - 2)(e^x + 1) > 0$
4. $\ln\left(x + \frac{3}{2}\right) > -\ln(x)$
5. $(x+1)^3 = e^7$

Solution :

1. $x \in]-1; e^7 - 1]$
2. $x \in]-1; +\infty[$
3. $x \in]\ln(2); +\infty[$
4. $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$
5. $x = e^{\frac{7}{3}} - 1$

Exercice 10/32

Quel est l'ensemble des solutions de

$$8 \times 8^x = 7$$

Solution : $x = \frac{7}{24\ln(2)}$

Exercice 11/32

Étudier complètement la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -3x\ln(x) + 2x$

Solution : La fonction est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$f'(x) = -3\ln(x) - 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} -3x\ln(x) + 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(-3\ln(x) + 2) = -\infty$
Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

x	0		$e^{-\frac{1}{3}}$		$+\infty$
f	‖ 0	$\nearrow$	$3e^{-\frac{1}{3}}$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 12/32

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x) = -x\ln(x)$

1. Calculer la fonction dérivée de f.
2. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$ sur $]0;+\infty[$.
3. Construire complètement le tableau de variation de f.

Solution :

1. La fonction f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle. Donc pour $x \in]0;+\infty[$,
   $f'(x) = -\ln(x) - 1$.
2. Soit $x \in]0;+\infty[$,
   $-\ln(x) - 1 \geq 0 \iff x \leq e^{-1}$
   Donc $S =]0;e^-1]$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\ln(x) = -\infty$
   Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
f	‖ 0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 13/32

Abréviation du terme « potentiel hydrogène », le pH précise si un milieu est acide, neutre ou basique. L'acidité dépend en effet de la concentration en ions hydronium H_3O^+ qui se calcule en fonction du pH par :

$$[H_3O^+] = 10^{-PH}$$

Calculer le pH du jus de citron dont la concentration en ions hydronium est de $0,005\ mol.L^{-1}$

Solution : $PH = -\log([H_3O^+]) = -\log(5 \times 10^{-3}) = -\log(5) + 3 \approx 2$

Exercice 14/32

La densité optique D d'un milieu est donnée par : $D = -\log(T)$, où T désigne le facteur de transmission du milieu ($0 < T \leq 1$).
On considère la fonction f définie sur $]0;1]$ par $f(x) = -\log(x)$

1. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0;1]$
2. Déterminer la densité optique d'un milieu dont le facteur de transmission est de 0,4
3. Le facteur de transmission lorsque la densité optique est égale à 1

Solution :

1. La fonction f est définie et dérivable sur $]0;1]$ par $f(x) = -\log(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$. Soit $x \in]0;1]$,
$f'(x) = -\dfrac{1}{x\ln(10)}$

x	0	1
f	$+\infty$	0

2. La densité optique est donnée par $f(0,4) = -\log(0,4) \approx 0,4$
3. Le facteur de transmission est donné par $10^{-1} = 0,1$

Exercice 15/32

1. Un premier capital de 6 000 euros est placé à intérêts composés au taux annuel de 9%. Au bout de combien d'années ce capital aura-t-il doublé ? Triplé ?
2. Un deuxième capital de 9 000 euros est placé le même jour à intérêts composés au taux annuel de 6%.
Au bout de combien d'années la valeur du premier capital aura-t-elle dépassé le second ?

Solution :

1. Cette situation peut-être modélisée par une suite géométrique (u_n), de premier terme $u_0 = 6000$ et de raison $q = 1,09$.
On a donc $u_n = 6000 \times 1,09^n$.

Recherche de l'année de doublement du capital de départ :
$u_n = u_0 \times 2 \iff n = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,09)}$.
Le capital de départ aura doublé lors de la 9 ème année.

Recherche de l'année de triplement du capital de départ :
$u_n = u_0 \times 3 \Longleftrightarrow n = \dfrac{\ln(3)}{\ln(1,09)}$.
Le capital de départ aura triplé lors de la 13 ème année.

2. Il est possible de modéliser cette situation avec une deuxième suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 9000$ et de raison $q = 1,06$.
On a donc $v_n = 9000 \times 1,06^n$.
On cherche ici à résoudre l'inéquation suivante :
$u_n \geq v_n \Longleftrightarrow 6000 \times 1,09^n \geq 9000 \times 1,06^n \Longleftrightarrow \left(\dfrac{1,09}{1,06}\right)^n \geq \dfrac{3}{2} \Longleftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(1,5)}{\ln\left(\frac{1,09}{1,06}\right)} \approx 14,5$
la valeur du premier capital aura dépassé le second au cours de la 15 ème année.

Exercice 16/32

Résoudre l'inéquation $3 - \dfrac{\ln(2x+1)}{2} \geq 1$.

Solution :Recherche du domaine de définition de l'inéquation :
Soit $x \in \mathbb{R}$, $2x+1 > 0 \Longleftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$. Donc l'inéquation existe si $x \in]-\dfrac{1}{2}; +\infty[$.
Soit $x \in]-\dfrac{1}{2}; +\infty[$,
$3 - \dfrac{\ln(2x+1)}{2} \geq 1 \Longleftrightarrow \ln(2x+1) \leq 4 \Longleftrightarrow x \leq \dfrac{e^4-1}{2}$ Donc $S =]-\dfrac{1}{2}; \dfrac{e^4-1}{2}]$

Exercice 17/32 : Position relative

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'équation $y = \ln(x)$.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \ln(x) - x + 1$.
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ définie au 1.
   (c) La fonction ln est-elle convexe ? Concave ? Justifier votre réponse.
   (d) Vérifier vos réponse en traçant $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ à l'aide de la calculatrice.

Solution :

1. $y = x - 1$
2. (a) $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$
   La fonction f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.
   (b) $f(1) = 0$ minimum de la fonction donc pour $x > 0$, $f(x) \leq x - 1$.
   (c) $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ la fonction est donc concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 18/32

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer sa dérivée et en déduire ses variations sur l'intervalle I à déterminer.

1. $f(x) = \ln(2x-5) - \ln(x)$
2. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$
3. $f(x) = 2e^{2x} - 9x + 1$

Solution :

1. $I = \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$

   La fonction f est définie sur $\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$ telle que $f(x) = \ln(u(x)) - \ln(x)$ où u est une fonction définie sur $\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$ par $u(x) = 2x-5$, donc dérivable sur $\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$, à valeurs dans $]0; +\infty[$.
   Par conséquent, f est dérivable sur $\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$ par composition et pour tout $x \in \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$,
   $f'(x) = \dfrac{2}{2x-5} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{(2x-5)x}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2x-5}{x}\right) = \ln(2)$

x	$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\ln(2)$

2. $I = \mathbb{R}$
   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \ln(u(v(x)))$ où v est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2+1$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0; +\infty[$.
   u est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(x) = \sqrt{x}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $]0; +\infty[$.
   Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{x^2+1}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. $I = \mathbb{R}$
   La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2e^{u(x)} - 9x + 1$ où u est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $f'(x) = 4e^{2x} - 9$

$4e^{2x} - 9 \geq 0 \iff x \geq \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{9}{4}\right) \iff x \geq \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(e^x)^2} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{2x} - 9x + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left(2 - \dfrac{9x}{(e^x)^2} + \dfrac{1}{e^{2x}}\right) = +\infty$

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	$2e^3 - 9\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1$	$\nearrow$ $+\infty$

Exercice 19/32

Soit la fonction $f \ : \ x \longmapsto x\ln(x)$
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variations complet.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1, puis celle de la tangente $\mathcal{T}'$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e.

Solution :

1. $]0;+\infty[$
2. Croissances comparées
3. $f'(x) = \ln(x) + 1$ donc fonction décroissante sur $]0;e^{-1}]$ et croissante sur $[e^{-1};+\infty[$.
4. $y = x - 1$ et $y = 2x - e$

Exercice 20/32

Étudier complètement la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par,

$$f(x) = 2 \times \ln(x + 5 + \frac{1}{x})$$

Solution : La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ telle que $f(x) = 2 \times \ln(u(x))$ où u est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = x + 5 + \dfrac{1}{x}$, donc dérivable sur $]0;+\infty[$, à valeurs dans $]0;+\infty[$.
Par conséquent, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ par composition et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$f'(x) = \dfrac{2(1 - \frac{1}{x^2})}{x + 5 + \frac{1}{x}} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x^2(x + 5 + \frac{1}{x})}$

x	0		1		$+\infty$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$2\ln(7)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 21/32

Étudier complètement la fonction f définie sur $]\frac{4}{3};+\infty[$ par $f(x) = -\ln(3x-4)$

Solution :

La fonction f est définie sur $]\frac{4}{3};+\infty[$ par $f(x) = -\ln(u(x)$ où u est une fonction définie sur $]\frac{4}{3};+\infty[$ par $u(x) = 3x-4$, donc dérivable sur $]\frac{4}{3};+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Par conséquent, f est dérivable sur $]\frac{4}{3};+\infty[$ par composition et pour tout $x \in]\frac{4}{3};+\infty[$,
$f'(x) = -\dfrac{3}{3x-4} < 0$
La fonction f est donc strictement décroissante sur $]\frac{4}{3};+\infty[$.

x	$\frac{4}{3}$		$+\infty$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 22/32

Étudier complètement la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 6-8x-7x\ln(x)$

Solution : La fonction f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$,
$f'(x) = -8-7\ln(x)-7 = -15-7\ln(x)$
Pour étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ il faut résoudre l'inéquation suivante :
$-15-7\ln(x) \geq 0 \iff 7\ln(x) \leq -15 \iff \ln(x) \leq -\dfrac{15}{7} \iff x \leq e^{-\frac{15}{7}}$.
$f(-\dfrac{15}{7}) = 6-8e^{-\frac{15}{7}}+15e^{-\frac{15}{7}} = 6+7e^{-\frac{15}{7}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 6$

x	0		$e^{-\frac{15}{7}}$		$+\infty$
f	$\Vert$ 6	$\nearrow$	$6+7e^{-\frac{15}{7}}$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 23/32

Étudier complètement la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 5(\ln(x))^2 - 3\ln(x) - 4$

Solution :
La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 5(u(x))^2 - 3u(x) - 4$ où u est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = \ln(x)$, donc dérivable sur $]0;+\infty[$.
Par conséquent, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ par composition et pour tout $x \in]0;+\infty[$,
$f'(x) = \dfrac{10}{x}\ln(x) - \dfrac{3}{x}$
Pour étudier le signe de $f'(x)$, il suffit de résoudre l'inéquation suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$\dfrac{10}{x}\ln(x) - \dfrac{3}{x} \geq 0$ donc $10\ln(x) - 3 \geq 0 \iff x \geq e^{\frac{3}{10}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} 5(\ln(x))^2 - 3\ln(x) - 4 = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)^2\left(5 - \dfrac{3}{\ln(x))} - \dfrac{4}{\ln(x))^2}\right) = +\infty$
$f(e^{\frac{3}{10}}) = 5(\ln(e^{\frac{3}{10}}))^2 - 3\ln(e^{\frac{3}{10}}) - 4 = 5 \times \dfrac{9}{100} - \dfrac{9}{10} - 4 = \dfrac{45}{100} - \dfrac{90}{100} - \dfrac{400}{100} = -\dfrac{445}{100} = -\dfrac{89}{20}$

x	0	$e^{\frac{3}{10}}$	$+\infty$
f	‖ $+\infty$	$-\dfrac{89}{20}$	$+\infty$

Exercice 24/32 : *

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{x-2}\right)$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Démontrer que pour tout réel $x \in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$, on a : $f(1-x) = -f(x)$.
2. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?

Solution :A demander.

Exercice 25/32 : *

Déterminer les limites des fonctions f suivantes (on précisera si ces limites justifient l'existence d'asymptotes) :

1. $f(x) = 2x - \ln(x)$ en $+\infty$
2. $f(x) = \dfrac{2+\ln(x)}{x^3}$ en $+\infty$
3. $f(x) = \ln(x+1) - 2\ln(x)$ en $+\infty$
4. $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ en $+\infty$
5. $f(x) = \ln(x)\ln(1-x)$ en 0
6. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ en $-\infty$

Solution :A demander.

Exercice 26/32 : *

Soit f la fonction définie $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. (a) Étudier la limite de f en 0
   (b) Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.
   (b) Résoudre sur l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Solution : A demander.

Exercice 27/32 : *

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.

1. **Étude de la fonction f**
   (a) Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.
   (a) Tracer dans un repère orthonormé la courbe représentative de $\mathcal{C}$ de la fonction f, la droite d'équation $y = x$ et les points M_0, M_1 et M_2 de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
   Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq e$.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[e;+\infty[$
3. On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
   (a) Démontrer que $f(\ell) = \ell$
   (b) En déduire la valeur de ℓ.

Solution : A demander.

Exercice 28/32 : Suite harmonique et constante d'Euler **

1. Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. On pose pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. On pose pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante.

4. Démontrer que $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune γ qu'on appelle la constante d'Euler.
6. Determiner pour quelle valeur de l'entier n on obtiendrait une valeur approchée de γ à 10^{-3} près. Calculer alors une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Solution : A demander.

Exercice 29/32 : Spécialité Mathématiques (Amérique du Sud 1) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 1

Solution : Cliquer ici

Exercice 30/32 : Spécialité Mathématiques (Amérique du Sud 2) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 4

Solution : Cliquer ici

Exercice 31/32 : Spécialité Mathématiques (Asie 1) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 3

Solution : Cliquer ici

Exercice 32/32 : Spécialité Mathématiques (Asie 2) - Bac 2023

Cliquer et faire l'exercice 2

Solution : Cliquer ici