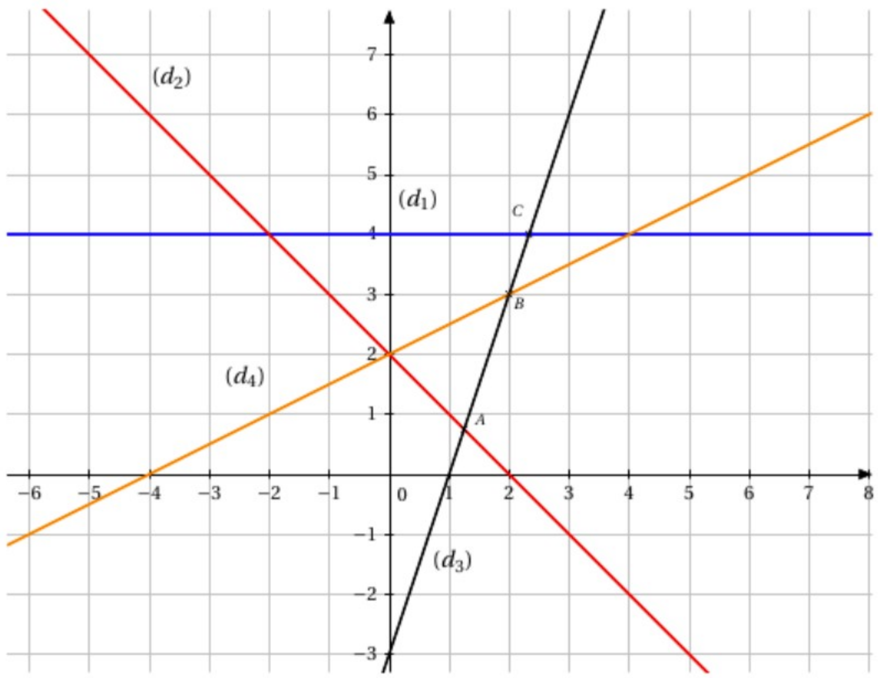
Corrigé : Exercices

Droites du plan

Exercice 1/6 : Vecteurs directeurs et équations de droites



1. Donner **deux vecteurs directeurs** pour chacune des droites représentées ci-dessus.
2. Donner alors une équation cartésienne pour chacune des droites.
3. En déduire l'équation réduite de chacune des droites. Identifier le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

Solution :

1. Par exemple, pour la droite rouge qui passe par $(0;2)$ et $(2;0)$: on a $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2-0\\0-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ et par exemple, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$.
2. Rouge : $-2x-2y+4=0$
   Bleu : $y=4$
   Jaune : $x-2y+4=0$
   Noir : $3x-y-3=0$
3. Rouge : $y=-x+2$
   Bleu : $y=4$

Jaune : $y = \dfrac{1}{2}x + 2$
Noir : $y = 3x - 3$

Exercice 2/6 : Équation de droite à partir de deux points

Soit les points $A(2; -1)$; $B(4; 2); C(-1; 0)$ et $D(1; 3)$.

1. Donner une équation cartésienne des droites (AB) puis (CD).
2. Étudier la position relative des droites.

Solution :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ Soit $M(x; y)$ un point du plan. On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$
   Si $M \in (AB)$ alors $det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$ d'où $3x - 2y - 8 = 0$
   De la même façon pour (CD) on obtient $3x - 2y + 3 = 0$.
2. Les droites ont le même vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, elles sont donc parallèles. Elles ne sont pas confondues car $-8 \neq 3$.

Exercice 3/6 : Droites parallèles et droites sécantes

Déterminer dans chacun des cas si les droites d et d' sont parallèles ou sécantes.

1. d a pour équation $2x + 3y - 5 = 0$ et d' a pour équation $4x + 6y + 3 = 0$.
2. d a pour équation $-5x + 4y + 1 = 0$ et d' a pour équation $6x - 1y - 2 = 0$.
3. d a pour équation $7x - 8y - 3 = 0$ et d' a pour équation $6x - 9y = 0$.
4. d a pour équation $9x - 3y + 4 = 0$ et d' a pour équation $-3x + 1y + 4 = 0$.

Solution :

1. Vecteur directeur de d : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$
   Vecteur directeur de d' : $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$
   Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires donc les droites sont parallèles.
   Soit le point de coordonnées $M(x_M; 0)$ appartenant à d :
   $2x_M + 3 \times 0 - 5 = 0 \longleftrightarrow x_M = \dfrac{5}{2}$
   Regardons si M appartient également à d' :
   $4 \times \dfrac{5}{2} + 6 \times 0 + 3 = 13$
   $13 \neq 0$ donc les droites d et d' ne sont pas confondues.
2. Vecteur directeur de d : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$
   Vecteur directeur de d' : $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}8\\-7\end{pmatrix}$
   $det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 28 + 40 = 68$ Or $68 \neq 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
   Les droites sont donc sécantes.
   Facultatif : recherche du point d'intersection
   Équation réduite de d : $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{1}{4}$
   Équation réduite de d' : $y = 6x - 2$

On résous $6x - 2 = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$
$x = \frac{4}{19} \times (2 - \frac{1}{4})$
D'où $x = \frac{7}{19}$ et $y = 6 \times \frac{7}{19} - 2 = \frac{4}{19}$
Le point $M(\frac{7}{19}; \frac{4}{19})$.

3. Vecteur directeur de d : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$
   Vecteur directeur de d' : $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$
   $det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 48 - 63 = 15$ Or $15 \neq 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. Les droites sont donc sécantes.

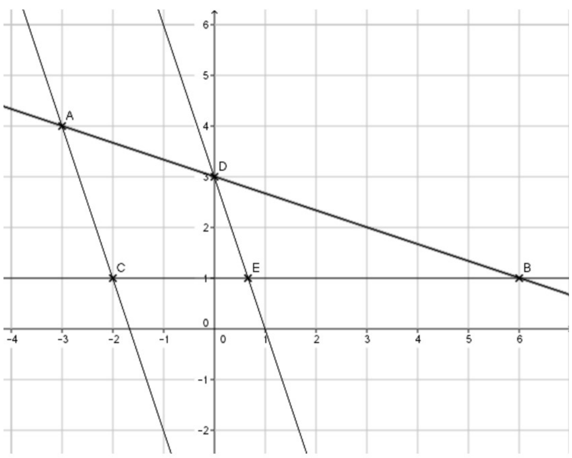
4. Vecteur directeur de d : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$
   Vecteur directeur de d' : $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$
   $det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = -9 + 9 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Les droites sont donc parallèles.
   Autre méthode pour déterminer si les droites sont confondues :
   On a $\overrightarrow{u} = -3\overrightarrow{v}$ or $4 \neq 4 \times -3$, donc les droites ne sont pas confondues.

Exercice 4/6 : Point sur une droite

On considère les points $A(-3; 4)$; $B(6; 1)$; $C(-2; 1)$ et $D(0; 3)$.

1. Placer les points dans un repère orthonormée.
2. Le point D est-il sur la droite (AB) ? Justifiez avec un calcul.
3. La parallèle à (AC) passant par D coupe la droite (BC) en E.
   (a) Déterminer une équation de la droite (DE).
   (b) Déterminer l'équation réduite de la droite (CB).
   (c) En déduire les coordonnées du point E.

Solution :

1. 

2. Plusieurs façons de faire cette question :
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

Or $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AD}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires. Les points A ; B et D sont alignés : $D \in (AB)$.
On pouvait également faire un calcul de coefficient directeur des droites (AB) et (AD).

3. (a) Le coefficient directeur de (AC) est :
   $m = \dfrac{1-4}{-2+3} = \dfrac{-3}{1} = -3$
   L'équation réduite de la droite (AC) est $y = -3x + p$.
   Or $A \in (AC)$ donc $4 = -3 \times (-3) + p$ donc $p = -5$
   Finalement l'équation réduite de la droite (AC) est $y = -3x - 5$
   Or $(AC) \backslash\backslash (DE)$ donc l'équation réduite de DE est de la forme $y = -3x + p'$ avec $p' \in \mathbb{R}$.
   Or $D \in (DE)$ donc $0 = -3 \times 3 + p' \iff p' = 3$. On a donc $y = -3x + 3$.

   (b) $y = 1$

   (c) $E \in (DE)$ et $E \in (CB)$ On a donc $y_E = 1$ et $x_E = \dfrac{1-3}{-3} = \dfrac{2}{3}$
   Finalement $E(\dfrac{2}{3}; 1)$.

Exercice 5/6 : Intersection de droites

On note les points $A(1; 2)$ et $B(-4; 4)$ ainsi que la droite (d) d'équation $y = -\dfrac{7}{11}x + \dfrac{3}{11}$.

1. Déterminer les coordonnées du point P de (d) d'abscisse 3.
2. Déterminer les coordonnées du point Q de (d) d'abscisse -4.
3. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
4. Déterminer les coordonnées du point k intersection de (d) et (AB).

Solution :

1. $y_P = -\dfrac{7}{11} \times 3 + \dfrac{3}{11} \iff y_P = -\dfrac{18}{11}$ donc $P(3; -\dfrac{18}{11})$.
2. $y_Q = -\dfrac{7}{11} \times (-4) + \dfrac{3}{11} \iff y_Q = \dfrac{31}{11}$ donc $Q(-4; \dfrac{31}{11})$.
3. $m = \dfrac{4-2}{-4-1} = \dfrac{-2}{5}$ l'équation réduite de (AB) est donc de la forme
   $y = -\dfrac{2}{5}x + p$ avec $p \in \mathbb{R}$.
   $A \in (AB)$ donc $2 = -\dfrac{2}{5} \times 1 + p \iff p = \dfrac{12}{5}$.
   Finalement $y = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{12}{5}$.
4. $-\dfrac{7}{11}x_K + \dfrac{3}{11} = -\dfrac{2}{5}x_K + \dfrac{12}{5}$
   $\iff (\dfrac{2}{5} - \dfrac{7}{11})x_K = \dfrac{12}{5} - \dfrac{3}{11}$
   $\iff -\dfrac{13}{55}x_K = \dfrac{117}{55}$
   $\iff x_K = -\dfrac{117}{13}$
   $\iff x_K = -9$
   On calcul y_K : $-\dfrac{2}{5} \times (-9) + \dfrac{12}{5} = 6$. Finalement $K(-9; 6)$

Exercice 6/6 : Une somme de carrés à connaître

A l'aide de la notion de projeté orthogonal, démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$.

Solution : Voir cours.