Corrigé : Exercices

Arithmétique

Exercice 1/7 : Décomposition en facteurs de nombres premiers

Répondre aux questions suivantes à l'aide d'une décomposition en facteurs premiers.

1. Déterminer les diviseurs de 18 et 24.
2. Le nombre 102 est-il un multiple de 17 ?
3. Donner deux nombres premiers entre eux.

Solution :

1. $-18\,;\,-9\,;\,-6\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,6\,;\,9\,;\,18\,;$
   $-24\,;\,-12\,;\,-8\,;\,-6\,;\,-4\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,6\,;\,8\,;;\,12\,;\,24.$
2. $102 = 17 \times 6$
3. 26 et 15.

Exercice 2/7 : Critères de divisibilité

Utiliser les critères de divisibilité pour répondre aux questions suivantes :

1. 20 est-il divisible par 2 ? 3 ? 5 ? 9 ? 10 ?
2. 85 est-il divisible par 2 ? 3 ? 5 ? 9 ? 10 ?
3. 231 est-il divisible par 2 ? 3 ? 5 ? 9 ? 10 ?
4. 972 est-il divisible par 2 ? 3 ? 5 ? 9 ? 10 ?

Solution :

1. 2 5 et 10
2. 5
3. 3
4. 2 3 et 9

Exercice 3/7 : Chercher et raisonner

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3 ?

Solution :

$S = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$ D'où S est divisible par 3.

Exercice 4/7 : Chercher et raisonner

Montrer que le produit de deux multiples de 2 est un multiple de 4.

Solution :$P = 2k \times 2k' = 4kk'$ D'où P est divisible par 4.

Exercice 5/7 : Nombres parfaits

Un nombre est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même. Montrer que 28 est un nombre parfait.

Solution :
$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

Exercice 6/7 : Chercher et raisonner

On considère le nombre dont l'écriture décimale est $4a3b$. Déterminer les valeurs possibles des chiffres a et b pour qu'il soit divisible par 12.

Solution : Il faut que ce nombre soit divisible par 4 et par 3.
Donc $3b$ est un multiple de 4 et $4 + a + 3 + b = 7 + a + b$ doit être un multiple de 3.
Les valeurs possibles pour b sont donc : $\{2; 6\}$.

Si $b = 2$ alors $9 + a$ n'est divisible par 3 que si $a = 0$ ou $a = 3$ ou $a = 6$ ou $a = 9$.

Si $b = 6$ alors $13 + a$ n'est divisible par 3 que si $a = 2$ ou $a = 5$ ou $a = 8$.

Les nombres possibles sont donc : $\{4032; 4236; 4332; 4536; 4632; 4836; 4932\}$

Exercice 7/7 : Facultatif

On considère un entier naturel n tel que $n + 1$ soit divisible par 4. Montrer que $n^2 + 3$ est également divisible 4.

Solution : Si $n + 1$ est divisible par 4, alors il existe un entier k tel que $n + 1 = 4k$.
On a donc $n = 4k - 1$ et $n^2 = (4k - 1)^2$.
On développe à l'aide de la deuxième identité remarquable : $n^2 = 16k^2 - 8k + 1$.
Finalement $n^2 + 3 = 16k^2 - 8k + 1 + 3 = 16k^2 - 8k + 4 = 4(4k^2 - 2k + 1)$
Comme $k \in \mathbb{Z}$ alors $4k^2 - 2k + 1 \in \mathbb{Z}$. En notant $k' = 4k^2 - 2k + 1$, on obtient $n^2 + 3 = 4k'$.