



Corrigé : Exercices

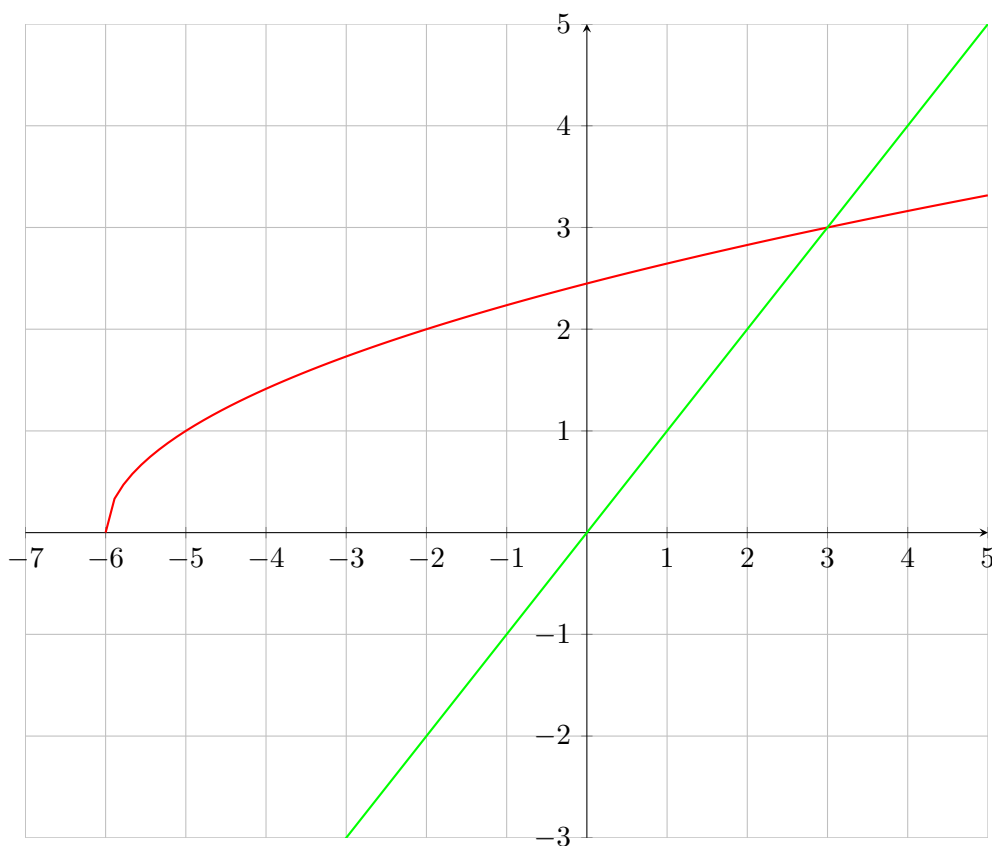
SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1/33

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$$

Représenter sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite (u_n) .

Exercice 2/33

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n .

1. $u_n = 2n^2 + 3n - 3$

3. $u_n = \frac{2}{n+2}$

5. $u_n = \frac{4n-2}{n+8}$

2. $u_n = n^2 - n + 1$

4. $u_n = \frac{3n^2+2}{n+3}$

6. $u_n = \frac{1}{n}(2 - 3n + 8n^2)$

Exercice 3/33

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \frac{(-1)^n \sin(n)}{n^3}$.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $-\frac{1}{n^3} \leq u_n \leq \frac{1}{n^3}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4/33 : Retour sur la récurrence

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
2. Démontrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

Solution :

1. Récurrence simple
2. Croissance + majoration = convergence
Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . D'après ce qui précède $\ell \in [0; 3]$. Or la fonction itératrice est continue sur $[0; 3]$. Donc ℓ est solution de l'équation $\ell = \sqrt{\ell + 6}$. D'où $\ell = 3$.

Exercice 5/33

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{(3+\frac{1}{2})^2} + \dots + \frac{1}{(3+\frac{1}{n})^n}$$

et (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.
2. Montrer que la suite (v_n) est majorée.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante. Étudier alors la convergence de la suite (u_n) .
4. Donner un encadrement de la limite de (u_n) .

Solution :

1. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $3 + \frac{1}{k} \geq 3 \iff \left(3 + \frac{1}{k}\right)^k \geq 3^k \iff \frac{1}{\left(3 + \frac{1}{k}\right)^k} \leq \frac{1}{3^k}$ D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$

2. $v_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$ (somme des termes d'une suite géométrique).

$$\text{Donc } v_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2 \times 3^n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$$

$$\text{Finalement, } \forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \frac{3}{2}$$

3. $u_{n+1} - u_n \geq 0$ croissance + majoration = convergence
4. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . Alors $\frac{5}{4} \leq \ell \leq \frac{3}{2}$ ($u_1 = \frac{5}{4}$).

Exercice 6/33

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. Pourquoi peut-on affirmer que la suite (u_n) converge ?

Solution :

1. (u_n) est décroissante (calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$).
2. décroissance + minoration par 0 = convergence.

Exercice 7/33

Dans chacune des questions suivantes, une ou plusieurs affirmations sont vraies. Justifier lesquelles.

1. Une suite décroissante et positive :

(a) tend vers 0	(c) peut ne pas être majorée
(b) converge	(d) est majorée
2. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n+4}{n+1}$.
La suite (u_n) est :

(a) croissante	(c) minorée
(b) décroissante	(d) majorée
3. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.
Alors $u_n - v_n$ a pour limite :

(a) 0	(c) $-\infty$
(b) $+\infty$	(d) On ne peut pas conclure.
4. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$.

(a) (u_n) converge vers 0	(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
(b) (u_n) converge vers un réel non nul	(d) (u_n) est bornée.
5. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n$. Alors :

(a) (u_n) est croissante	(c) (u_n) n'est pas majorée
(b) (u_n) est majorée	(d) (u_n) diverge vers $+\infty$

Solution :

1. (b) et (d) (majorée par son premier terme)
2. (b) et (c) et (d) (majorée par 4 car $\frac{3n+4}{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{n+1} = 3 + \frac{1}{n+1}$)
3. (b)
4. (a) et (d)

5. (c) et (d)

Exercice 8/33 : Nombre d'Erdős et nombre de Champernowne.

- On pose $u_1 = 0,2$; $u_2 = 0,23$; $u_3 = 0,235$; ...; u_n est le nombre obtenu en juxtaposant les n premiers nombres premiers après la virgule. Démontrer que la suite est convergente.
- On pose $u_1 = 0,1$; $u_2 = 0,12$; $u_3 = 0,123$; ...; $u_{10} = 0,12345678910$; (u_n) est le nombre obtenu en juxtaposant les n premiers nombres entiers après la virgule. Démontrer que cette suite est convergente.

Solution :

- Suite croissante et majorée
- Suite croissante et majorée

Exercice 9/33

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = n^3$.

- A partir de quel rang a-t-on, $v_n > 1000$?
- A l'aide de la définition, montrer que (v_n) diverge vers $+\infty$.

Solution :

- $n > 11$
- Soit A un réel.
Il faut montrer qu'il existe un rang N tel que si $n \geq N$, alors $n^3 > A$.
Si $A < 0$ alors $N = 0$ convient.
Si $A \geq 0$ alors l'inégalité $n^3 > A$ équivaut à $n > \sqrt[3]{A}$. En posant N comme étant l'entier directement supérieur à $\sqrt[3]{A}$, si $n \geq N$ alors $n^3 > A$.
Donc (v_n) diverge vers $+\infty$

Exercice 10/33 : Règles opératoires sur les limites

Étudier la convergence de chacune des suites (u_n) suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1. $u_n = n^3 - 2n^2 + 3$ | 4. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ |
| 2. $u_n = \frac{5}{n^4} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \pi$ avec $n \geq 1$ | 5. $u_n = 2 \times \pi^n - 3 \times (0,5)^n$ |
| 3. $u_n = \frac{2n^3 + 3n + 5}{n^2 + n - 2}$ | 6. $u_n = 8^n - 2^{n+1}$ |

Solution :

- | | |
|---|---|
| 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ | 4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ |
| 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pi$ | 5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ |
| 3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ | 6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ |

Exercice 11/33 : Théorème d'encadrement

Étudier la convergence des suites (u_n) suivantes.

1. $u_n = \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n^2}$ avec $n \geq 1$

3. $u_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ avec $n \geq 1$

2. $u_n = \frac{n^2 - \cos(n)}{n^2 + 1}$

4. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k + n^2}$

Solution :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Exercice 12/33

Déterminer, si elle existe, la limite des suites u_n :

1. $\left(\frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

2. $\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n > 0}$

3. $\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n > 1}$

Exercice 13/33 : Théorème de comparaison

Les deux questions sont indépendantes.

1. La suite (u_n) est définie par $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Étudier la convergence de la suite (u_n) .

(b) En déduire la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$

2. La suite (u_n) est définie par $u_n = n + 1 - \cos(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $n \geq u_n \geq n + 2$.

(b) Quel est le comportement de la suite en $+\infty$.

3. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - n$. Démontrer par récurrence que pour tout naturel $n \geq 3$, $u_n \geq 1, 5^n$. En déduire la divergence de (u_n) .

Solution :

1. La suite (u_n) est définie par $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

2. La suite (u_n) est définie par $u_n = n + 1 - \cos(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Utiliser $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3. Récurrence simple : initialisation, hérédité et conclusion.

Exercice 14/33 : Calcul de limites de suites particulières

1. Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 1 - \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
Calculer la limite de la suite (S_n) .

2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1, 9$, $u_1 = 1, 99$, $u_2 = 1, 999, \dots$

Calculer la limite de la suite (u_n) .

3. Calculer la limite de la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

Solution :

1. Cette somme correspond à la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme 1.
Donc d'après le cours : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}$
2. On a $u_n = 1 + \sum_{k=0}^n 0,9 \times 10^{-k}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n 0,9 \times 10^{-k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9 \times \sum_{k=0}^n (10^{-1})^k = 0,9 \times \frac{1}{1 - 10^{-1}} = 1$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison 10^{-1})
D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \sum_{k=0}^n 0,9 \times 10^{-k} = 2$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1$ (Somme télescopique).

Exercice 15/33

1. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 3.
2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n^2 - 2n + 17 - \frac{1}{n^2}$. Démontrer par des minoration successives que la suite (u_n) est minorée.
3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est bornée. On pourra calculer les premiers termes de la suite (u_n) pour conjecturer un de ses minorants et majorants.

Solution :

1. $u_n = \frac{3n+1}{n+1} = \frac{3n+3-2}{n+1} = 3 - \frac{2}{n+1} \leq 3$ La suite (u_n) est donc majorée par 3.
2. $n^2 \geq 1 \iff n^2 - 2n \geq -1 \iff n^2 - 2n + 17 \geq 16 \iff n^2 - 2n + 17 - \frac{1}{n^2} \geq 15$ Donc 15 est un minorant de la suite (u_n) .
3. Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $0 \leq u_n \leq 1,5$

Initialisation : rang $n = 0$.

$u_0 = 0$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n et montrons que cela implique $P(n+1)$ vrai.

$$\begin{aligned}
 P(n) \text{ vraie} &\iff 0 \leq u_n \leq 1,5 \\
 &\iff 2 \geq 2 - u_n \geq 2 - 1,5 \\
 &\iff 1,5 \geq \sqrt{2} \geq \sqrt{2 - u_n} \geq \sqrt{0,5} \geq 0 \\
 &\implies 1,5 \geq u_{n+1} \geq 0
 \end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\implies P(n+1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 0$.
 D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
 La propriété est ainsi démontrée.

Exercice 16/33

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3n + 1$.

1. Justifier pourquoi pour tout réel $A > 0$ il existe un rang N à partir duquel $u_n > A$.
2. Écrire un algorithme qui peut retourner ce rang N après que l'utilisateur ait rentré le réel A .
3. Implémenter l'algorithme précédent puis déterminer le rang N à partir duquel on a $u_n > 10^7$.

Solution :

1. (u_n) est une suite divergente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
2. Utiliser une fonction et une boucle while.

The screenshot shows a Python IDE with a file named 'untitled0.py'. The code defines a function 'rang(A)' that takes a real number A as input and returns the smallest integer n such that u_n > A. The function uses a while loop to increment n until the condition is met. The console shows the function being called with A = 10**7, returning 2238. Then, the function is called with A = 10**7, returning (2238, 10001628).

```

1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  """
3  Created on Wed Jul 19 17:44:53 2023
4
5  @author: Sabrina Fournier
6  """
7
8
9  def rang(A) :
10     n=0
11     u=0
12     while u<A:
13         u=2*n**2-3*n+1
14         n=n+1
15     return n,u
  
```

Console I/A X

```

In [4]: rang(10**7)
Out[4]: 2238

In [5]: runfile('C:/Users/Sabrina Fournier/Nextcloud/Cours/seconde/Cours PDF/projet/untitled0.py', wdir='C:/Users/Sabrina Fournier/Nextcloud/Cours/seconde/Cours PDF/projet')

In [6]: rang(10**7)
Out[6]: (2238, 10001628)

In [7]:
  
```

Exercice 17/33

La suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 = 1$.

1. Représenter dans un repère les premiers termes de la suite (u_n) et émettre des conjectures.
2. Quel est le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$? Le prouver.
3. Calculer la limite de la suite (u_n) .

Solution :

1. Suite croissante et convergente vers un réel positif ℓ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ minoration par 1.
2. Montrer par récurrence : (u_n) croissante et majorée (par 3 par exemple) donc convergente.
3. par unicité de la limite : $\ell = \sqrt{\ell + 3} \implies \ell^2 = \ell + 3$. Finalement $\ell = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

Exercice 18/33

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Établir l'égalité $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ lorsque $k \geq 2$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (u_n) est majorée.
4. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

Solution :

1. $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$ car $k-1 \leq k$
2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$
3. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$
4. Suite croissante majorée = convergente (vers $\frac{\pi^2}{6}$ sera vu dans le supérieur).

Exercice 19/33

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2 - x)$. Montrer que f est strictement croissante dans l'intervalle $[0; 1]$ et que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.
2. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0; 1]$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer alors sa limite ℓ .

Solution :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2 - x - x = 2 - 2x$$

$$f'(x) \geq 0 \iff x \leq 1$$

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$:

f étant strictement croissante, $\forall x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.

2. Récurrence sur l'inégalité $0 \leq u_n \leq 1$ en utilisant la fonction f étudiée précédemment.
3. Récurrence sur l'inégalité $u_{n+1} \geq u_n$ en utilisant la fonction f étudiée précédemment.
4. la suite (u_n) est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente. D'après l'unicité de la limite :

$$\ell = \ell(2 - \ell) \iff \ell^2 - \ell = 0$$

$$\ell = 0 \text{ ou } \ell = 1$$

La suite (u_n) étant strictement croissante et $u_0 = \frac{1}{2}$: $\ell = 1$

Exercice 20/33 : Type bac

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.
(b) En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n + 1$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n + n - 1$.
5. (a) Soit p un entier naturel non nul. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?
On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0 .
(b) Justifiez que $n_0 \leq 3p$.
(c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$
(d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq 10^p$.

Solution :

1. $u_1 = 3$ et $u_2 = 9 - 2 + 3 = 10$
2. (a) Récurrence simple : $u_n \geq n \iff u_{n+1} \geq n + 3 \geq n + 1$
(b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
3. $u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geq 2n - 2n + 3 = 3$ d'où le résultat...
4. (a) $v_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 - (n + 1) + 1 = 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1)$
 (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = 1$
(b) $v_n = 3^n$ donc $3^n = u_n - n + 1 \iff u_n = 3^n + n - 1$
5. (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
(b) $3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geq 27^p \geq 10^p$ d'où $n_0 \leq 3p$ (la suite (u_n) est croissante).
(c)

(d)

```

1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  """
3  Created on Thu Jul 20 11:02:12 2023
4
5  @author: Sabrina Fournier
6  """
7
8  def rang(p):
9      n=0
10     u=0
11     while u<10**p :
12         u=3**n+n-1
13         n=n+1
14     return n-1,u
  
```

Console 1/A

```

C:\Users\Sabrina Fournier\Nextcloud\Cours\seconde\Cours PDF\projet\
In [5]: rang(3)
Out[5]: (7, 2193)

In [6]: 3**6+6-1
Out[6]: 734

In [7]: rang(3)
Out[7]: (7, 2193)

In [8]:
  
```

Exercice 21/33

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 1}$.

1. Démontrer que pour tout naturel n , $u_n \in [1; 2]$.
2. Vérifier que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.
5. Démontrer que la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ diverge vers $+\infty$.
6. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il retourne la valeur de S_n une fois que l'utilisateur a saisi la valeur de n :

```

Entree : n un entier naturel
Variables :
    u, s sont des variables réelles
    n, i sont des variables entières
Initialisation :
    u prend la valeur 2
    s prend la valeur u
    i prend la valeur 0
    Demander la valeur de n
Traitement :
TantQue ...
    Affecter à i la valeur i+1
    Affecter à u la valeur ...
    Affecter à s la valeur ...
FinTantQue
Sortie :
    Afficher s
  
```

Solution :

1. Récurrence simple
2. $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{4}{u_n + 1} - u_n = \frac{3u_n + 3 - 4 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{u_n + 1} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1] \implies \forall n \in \mathbb{N}, -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1} \leq 0$
La suite (u_n) est donc décroissante.
4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 elle est donc convergente.
Par unicité de la limite ℓ :

$$\ell = 3 - \frac{4}{\ell + 1} \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell - 1)^2 = 0$$

Finalement, $\ell = 1$

5. $1 \leq u_n \leq 2 \iff n \leq S_n \leq 2n$ Théorème des gendarmes...
6. Tant que $i < n$
 $u = 3 - 4/(i+1)$
 $s = s + u$

Exercice 22/33 : Vrai ou Faux

1. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est convergente.
2. Si (u_n) est une suite de réels non nuls telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n} = 1$
5. Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$
La suite (t_n) admet pour terme explicite $t_n = \frac{n}{n+1}$ lorsque $n \geq 0$.
6. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 1,5 \\ u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{n} \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$
La suite (u_n) converge vers 2.
7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - n^2 = 0$
8. Si les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $v_n = u_n + 3$, alors la suite (v_n) est géométrique.
9. Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$. On définit une suite (S_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (S_n) est convergente.
10. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.
11. Soit (u_n) une suite bornée sur $\mathbb{N}$ alors la suite $\frac{u_n}{n}$ avec $n \geq 1$ est convergente.
12. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 3$
13. Soit (u_n) une suite récurrente définie sur $\mathbb{N}$ et de termes strictement positifs. On considère également une suite récurrente définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2}{u_n}$. Si la suite (v_n) est majorée et la suite (u_n) décroissante alors la suite (v_n) est convergente.
14. Soit une suite (u_n) qui vérifie pour tout entier naturel $n \geq 1$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{n}|u_n|$. Si la suite (u_n) est bornée alors elle converge vers $\sqrt{2}$.
15. Toute suite majorée convergente est croissante.
16. Soit une suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}$ et $u_0 = 1$. La suite (u_n) est croissante et majorée.

Solution :

1. faux
2. faux (attention au signe)
3. vrai (calculer $t_{n+1} - t_n$ en supposant vrai l'expression)
4. faux (Si une limite ℓ existe alors $\ell = 2\ell$)
5. vrai
6. faux
7. faux
8. vrai
9. faux ($u_n = \frac{1}{n}$)
10. vrai
11. vrai
12. vrai
13. vrai
14. vrai
15. faux ($u_n = \frac{1}{n} \sin(n)$)
16. Faux

Exercice 23/33 : Suite arithmético-géométrique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

1. Calculer le réel b pour lequel la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + b$, $n \in \mathbb{N}$ est géométrique.
2. Exprimer (v_n) puis (u_n) en fonction de n .
3. En déduire la limite de (u_n) .

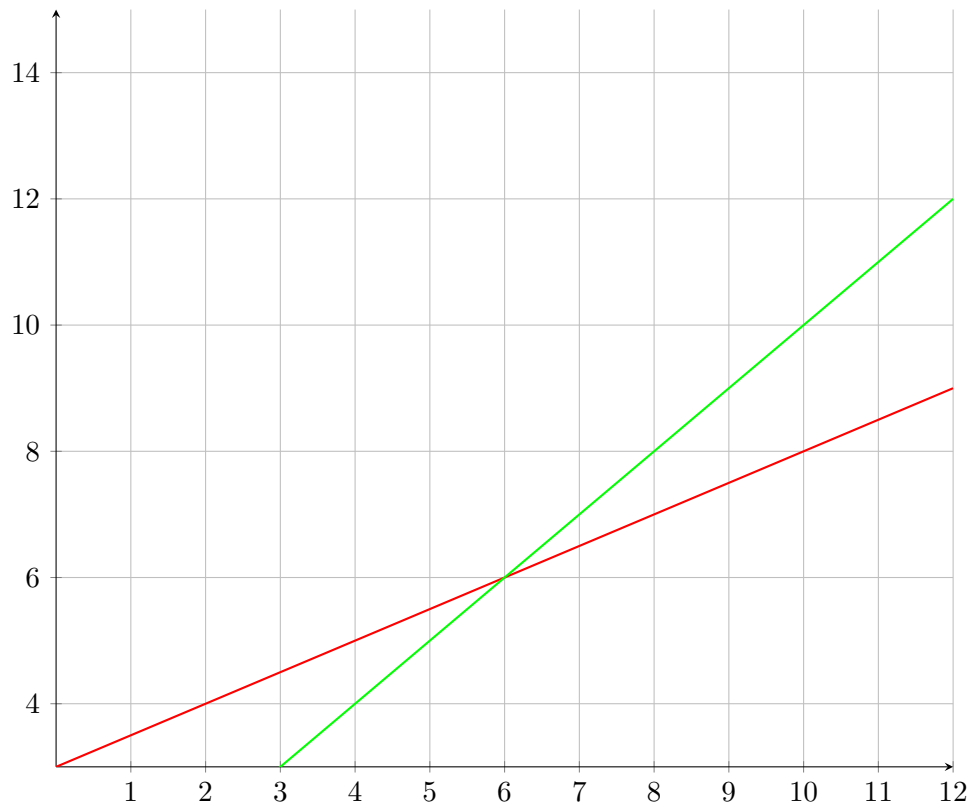
Solution :

1. $b = -0,5$
2. $v_n = 0,5 \times 3^n$ et $u_n = 0,5 \times (3^n + 1)$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 24/33 : Suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5 \times u_n + 3$.

1. Résoudre l'équation $x = 0,5x + 3$. Dans la suite, on notera r la solution de cette équation.
2. On considère la $(v_n) = (u_n - r)$.
 - (a) Montrer que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - (b) Exprimer v_n en fonction de n .
 - (c) Déterminer la limite de la suite (v_n) .
3. Exprimer u_n en fonction de v_n et déterminer la limite de la suite (u_n)
4. Représenter sur le graphique ci-dessous, u_0 , u_1 , u_2 et u_3 . Votre construction est-elle conforme avec le résultat de la question précédente ? (On a représenté en vert la courbe représentative de la fonction d'équation $y = x$ et en rouge $y = 0.6x + 8$)

**Solution :**

1. $r = \frac{8}{0,4} = 20$
2. On considère la $(v_n) = (u_n - r)$.
 - (a) $v_{n+1} = 0,6u_n + 8 - 20$ donc $v_{n+1} = 0,6u_n - 12 = 0,6(u_n - 20) = 0,6v_n$
Suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = 41$.
 - (b) $v_n = 41 \times 0,6^n$
 - (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$
3. $u_n = 41 \times 0,6^n + 20$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20$

Exercice 25/33 : Suite récurrente homographique et suite auxiliaire géométrique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

On supposera ici que la suite (u_n) est bien définie autrement dit que pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n \neq -1$.

1. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$ avec $n \in \mathbb{N}$. On supposera ici que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n .
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n ainsi que sa limite.

Solution :

1. $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ donc $v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$2. u_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2 - 2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2 - 1} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Exercice 26/33 : Suite récurrente homographique et suite auxiliaire arithmétique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$.

On supposera que pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n \neq 3$.

1. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ avec $n \in \mathbb{N}$. On supposera que pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n \neq 2$. Démontrer que la (v_n) est arithmétique et exprimer v_n en fonction de n .
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n ainsi que sa limite.

Solution :

1. $v_{n+1} = v_n - 1$ donc $v_n = -\frac{1}{2} + n \times (-1)$
2. $u_n = \frac{1}{-\frac{1}{2} + n \times (-1)} + 2$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

Exercice 27/33 : Sauvegarde d'une espèce

La population du chabot du lez diminue de 25% par an. La population du 1^{er} mars 2020 était de 3000 individus. Il est décidé d'introduire 400 alevins tous les ans pour enrayer la disparition de l'espèce. On note u_n le nombre d'individus, en milliers, présents dans la rivière le 1^{er} mars 2020 + n .

1. Expliquer pourquoi $u_0 = 3$ et $u_1 = 2.65$.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Déterminer la suite constante égale à l qui vérifie la même relation de récurrence que (u_n) .
4. Montrer que la suite $(u_n - l)$ est géométrique de raison 0.75. En déduire une expression de u_n en fonction de n .
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini. Interpréter le résultat pour la situation étudiée.

Solution :

1. Le nombre initial d'individus est 3 000 donc $u_0 = 3$. Puis $u_1 = 0.75 \times 3 + 0.4 = 2.65$.
2. $u_{n+1} = 0.75u_n + 0.4$
3. On cherche l telle que $l = 0.75l + 0.4$ donc $l = 1.6$
4. $u_{n+1} - l = 0.75u_n + 0.4 - 1.6 \iff u_{n+1} - l = 0.75u_n - 1.2 \iff u_{n+1} - l = 0.75(u_n - 1.6)$
On a donc bien $u_{n+1} - l = 0.75(u_n - l)$ Donc $(u_n - l)$ est une suite géométrique de raison 0.75 et de premier terme $u_0 - l = 3 - 1.6 = 1.4$.
 $u_n = 1.4 \times 0.75^n + 1.6$
5. $0 < 0.75 < 1$ donc la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini est 1.6. La population de poissons se stabilisera à long terme autour de 1600 individus.

Exercice 28/33

Déterminer le sens de variation de chacune des suites :

1. La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n!$,
2. La suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{n!}{2^n}$,
3. La suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$w_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

,

4. La suite (z_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $z_n = \frac{1}{n \times n!}$.

Solution :

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ croissante.
2. $v_{n+1} - v_n \geq 0$ pour $n \geq 1$ croissante et décroissante avant.

Exercice 29/33 : Un peu de Python

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = u_n + n + 1$ pour tout entier naturel n .

1. Compléter l'algorithme ci-contre pour que la variable n contienne après son exécution le plus petit entier naturel n_0 tel que u_{n_0} est strictement supérieur à A .

```

u ← ....
n ← ....
Tant que .....
    u ← .....
    u ← .....
Fin Tant que

```

2. Programmer cet algorithme sous forme d'une fonction Python et le tester avec $A = 200$ puis $A = 5\,000$.

Solution :

```

1. u ← 1
   n ← 0
Tant que u ≤ A
    u ← u + n + 1
    n ← n + 1
Fin Tant que

```

2. $n = 100$

Exercice 30/33 : Pour aller plus loin

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

.

1. La suite (u_n) est-elle monotone ? Justifier votre résultat.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,5 \leq u_n \leq 1,3$.

3. Prouver que si la suite (u_n) est convergente alors elle converge forcément vers le réel 1.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - 1 = \frac{1 - u_n}{\sqrt{2 - u_n} + 1}$
5. Quel est le maximum de la fonction f définie sur $[0, 5; 1, 3]$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - x} + 1}$?
6. En déduire qu'il existe un réel $0 \leq k \leq 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq k|u_n - 1|$.
7. Par récurrence prouver que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - 1| \leq k^n|u_0 - 1|$.
8. Démontrer alors la convergence de (u_n) vers le nombre réel 1.

Solution :

1. $u_0 = 0, 5$, $u_1 = \sqrt{1, 5}$, $u_3 = \sqrt{0, 5} \dots$
2. Récurrence simple.
3. Par unicité de la limite : $\ell = \sqrt{2 - \ell} \iff \ell^2 + \ell - 2 = 0 \iff \ell = 1$ ou $\ell = -1$
 $u_n \geq 0$ donc $\ell = 1$.
4. $u_{n+1} - 1 = \sqrt{2 - u_n} - 1 = \frac{2 - u_n - 1}{\sqrt{2 - u_n} + 1} = \frac{1 - u_n}{\sqrt{2 - u_n} + 1}$
5. Le maximum de f est atteint lorsque $\sqrt{2 - x}$ est à son minimum, c'est à dire en 1,3.
 $f(1, 3) = \frac{1}{\sqrt{0, 7} + 1} \approx 0, 54$.
6. $|u_{n+1} - 1| = \left| \frac{1 - u_n}{\sqrt{2 - u_n} + 1} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2 - u_n} + 1} (1 - u_n) \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2 - u_n} + 1} \right| |(u_n - 1)| = |f(u_n)| |(u_n - 1)| \leq f(1, 3) \times |(u_n - 1)|$ On pose $f(1, 3) = k$ d'où le résultat...
7. Hérédité : $|u_{n+2} - 1| = \left| \frac{1 - u_{n+1}}{\sqrt{2 - u_{n+1}} + 1} \right| \leq k|u_{n+1} - 1| \leq k k^n |u_0 - 1| \dots$ D'où le résultat.
8. $k < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes...

Exercice 31/33 : Pour aller plus loin

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 &= 4 \\ v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 , v_1 , u_2 et v_2 .
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
 - (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
 - (b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n) .
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.
 - (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
 - (b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n) .

Solution :

1. $u_1 = \frac{7}{2}$, $v_1 = \frac{15}{4}$, $u_2 = \frac{29}{8}$ et $v_2 = \frac{59}{16}$.

$$2. \quad (a) \quad w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4}w_n$$

D'où le résultat.

$$(b) \quad w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

$$3. \quad - \quad u_{n+1} - u_n = \frac{w_n}{2} \geq 0 \text{ la suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}$$

$$- \quad v_{n+1} - v_n = \frac{-w_n}{4} \leq 0 \text{ la suite } (v_n) \text{ est donc décroissante.}$$

$$- \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes et de même limite ℓ .

$$4. \quad (a) \quad t_{n+1} - t_n = 0 \text{ d'où le résultat...}$$

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = t_0 = \frac{11}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{\ell + 2\ell}{3} = \frac{11}{3} \text{ On en déduit } \ell = \frac{11}{3}.$$

Exercice 32/33 : Suite de Héron (encadrement de $\sqrt{2}$) *

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{2}$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}$$

(d) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n - \sqrt{2} \leq \frac{(u_0 - \sqrt{2})^{2^n}}{2\sqrt{2}}$$

(e) Qu'en déduit-on pour la suite (u_n) ?

(f) A l'aide d'un script en Python calculer u_3 et le comparer à $\sqrt{2}$.

Solution :

1. Récurrence simple

$$2. \quad (a) \quad \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2} = \frac{\frac{1}{2}u_n^2 + 1 - \sqrt{2}u_n}{u_n} = \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}$$

- (b) Évident
 (c) Évident avec la question 2b
 (d) Hérédité (non rédigé!) :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\frac{1}{2} \times \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2} \times \frac{((u_0 - \sqrt{2})^{2^n})^2}{\sqrt{2}}$$

Donc,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{8 \times 2\sqrt{2}} (u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}}$$

Finalement,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(u_0 - \sqrt{2})^{2^{n+1}}}{2\sqrt{2}}$$

- (e) (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

(f)

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 """
3 Created on Mon Sep 25 13:00:30 2023
4
5 @author: Sabrina Fournier
6 """
7
8 import math as m
9
10 def heron(i):
11     n=0
12     u=3/2
13     d=0
14     while n<i:
15         u=0.5*(u+(2/u))
16         n=n+1
17         d=u-m.sqrt(2)
18     return(u,n,d)
  
```

Console 1/A X

```

In [6]: m.sqrt(2)
Out[6]: 1.4142135623730951

In [7]: runfile('C:/Users/Sabrina Fournier/Nextcloud/Cours/seconde/Cours PDF/projet/untitled0.py', wdir='C:/Users/Sabrina Fournier/Nextcloud/Cours/seconde/Cours PDF/projet')

In [8]: heron(3)
Out[8]: (1.4142135623746899, 3, 1.5947243525715749e-12)

In [9]:
  
```

Exercice 33/33 : type bac

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 40 \\ u_{n+1} &= 0,008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

Où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

- Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.
 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.
- Résoudre dans l'intervalle $[0; 100]$ l'équation $f(x) = x$.
- (a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 100]$ et dresser son tableau de variations.

- (b) En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.
 - (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - (d) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :  
    n=0  
    u=40  
    while u<p :  
        n=n+1  
        u=0.008*u*(200-u)  
    return (n+2021)
```

L'exécution de `seuil(100)` ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.