Corrigé : Exercices

ORTHOGONALITÉ

Exercice 1/15

Soit un cube ABCDEFGH de côté a.
calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$
2. $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CA}$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG}$
4. $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH}$

Solution :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = a^2$
2. $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CA} = -2a$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$
4. $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH} = a^2$

Exercice 2/15 : Repère orthonormé

Soit un cube ABCDEFGH de côté a.
I et J sont les milieux respectifs de $[EF]$ et $[GC]$.
calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HC}$
2. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{GJ}$
3. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{JA}$
4. $\overrightarrow{JH} \cdot \overrightarrow{JD}$

Solution :

1. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HC} = \dfrac{1}{2}$
2. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{GJ} = 0$
3. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{JA} = -\dfrac{1}{2}$
4. $\overrightarrow{JH} \cdot \overrightarrow{JD} = \dfrac{3}{4}$

Exercice 3/15

On considère de nouveau le cube de côté a.
Déterminer une mesure de l'angle θ entre les droites (DF) et (HB) en degré à 10^{-1} près.

Solution : $\theta \approx 70,5°$

Exercice 4/15

Considérons un plan $\mathcal{P}$, et un repère orthonormé de l'espace. Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$, de coordonnées respectives $(1; -1; -3)$, $(-1; 1; 1)$ et $(2; -3; 1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}(-\frac{8}{3};-2;\frac{2}{3})$ est-il normal au plan $\mathcal{P}$?

Solution : Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et sont tout deux orthogonaux à $\overrightarrow{u}$.

Exercice 5/15

Soit ABCDEFGH une cube de côté a.
Montrer que $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE).

Solution : Montrer que $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DE}$;

Exercice 6/15

Soit le cube ABCDEFGH. Montrer que (AB) et (CF) sont orthogonales.

Solution : Montrer que (AB) est orthogonale à (BC) et à (BF). En déduire qu'elle est orthogonale au plan (BCF).
D'où (AB) est orthogonale à toute droite du plan (BCF).

Exercice 7/15

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. On considère les points $A(2;-1;-5)$ et $B(3;1;-4)$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par $C(4;6;9)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1;1;-3)$.
Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont orthogonales.

Solution : Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.

Exercice 8/15

On considère un cube ABCDEFGH. Démontrer que la droite (DG) est perpendiculaire au plan (BEH).

Solution : (DG) perpendiculaire à (HC) car CDHG est un carré.
(DG) perpendiculaire à (FG) car ADGF est un rectangle.
(FG) est parallèle à (HE), donc (DG) orthogonale à (HE).
(HC) et (HE) appartiennent au plan (BEH) et sont sécantes, d'où le résultat.

Exercice 9/15

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.
Démontrer que (FD) est orthogonale au plan (ACH).

Solution : Utiliser le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, pour montrer que $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ACH).

Exercice 10/15

On considère le point $A(2;1;-1)$ et la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-2;1;1)$ passant par le point $M(3;-5;2)$.
Déterminer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.

Solution : On calcul le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{u}=-2$
On calcule $||\overrightarrow{u}||=\sqrt{6}$
Donc $MH=\dfrac{|\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{u}|}{||\overrightarrow{u}||}$
Le théorème de Pythagore donne $AH=\dfrac{2\sqrt{102}}{3}$.

Exercice 11/15

Soit le plan $\mathcal{P}$ passant par $M(1,1,2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1,-2,0)$.
Calculer la distance entre $\mathcal{P}$ et le point $A(5,0,1)$.

Solution : $d(A,\mathcal{P})=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

Exercice 12/15

Soit ABCDEFGH un cube.

1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BD).
2. Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}$
3. En déduire que la droite (AC) est orthogonale au plan (HDB).

Solution :

1. ABCD est un carré donc les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires
2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}=0$
3. Les droites (AC) et (BD) sont orthogonales et (AC) et (BF) sont orthogonales donc (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (HDB)

Exercice 13/15

ABCDEFGH est un cube de côté α.
I est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. Calculer $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}$
2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux.
3. Pour la suite, on admettra de même que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux. Montrer alors que I est le projeté orthogonal de E sur (AFH).
4. Montrer que les droites (AI) et (HF) sont orthogonales et que les droites (HI) et (AF) sont orthogonales.
5. En déduire la position du point I dans le triangle AFH.

Solution :

1. Le projeté orthogonal de F sur (AE) est E donc $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{AF}=-\alpha^2$ Le projeté orthogonal

de F sur (AB) est B
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \alpha^2$
or $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}$
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$

2. $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AF}$... d'où le résultat.
3. $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$ du plan (AFH) donc (EC) est orthogonale à deux droites sécantes de (AFH) donc (EC) ou (EI) est orthogonale au plan (AFH) avec $I \in (AFH)$
4. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{HF} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI}) \cdot \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HF}$
   (AE) est orthogonale au plan (EHF) donc à toute droite du plan (EHF) donc à la droite (HF) et $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HF} = 0$ (EI) est orthogonale au plan (AFH) donc à toute droite du plan (AFH) donc à la droite (HF) et $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{HF} = 0$ donc $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{HF} = 0$

   $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EI}) \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AF}$
   (HE) est orthogonale au plan (ABF) donc à toute droite du plan (ABF) donc à la droite (AF) et $\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ (EI) est orthogonale au plan (AFH) donc à toute droite du plan (AFH) donc à la droite (AF) et $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$ donc $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$
5. Dans le plan (AFH) on a :
   $(AI) \perp (HF)$ donc (AI) est la hauteur issue de A dans le triangle AFH et $(HI) \perp (AF)$ donc (HI) est la hauteur issue de H dans le triangle AFH donc I est le point de concours des hauteurs du triangle AFH et c'est donc l'orthocentre du triangle. Comme $AF = FH = AH$ (diagonales des faces carrées) le triangle AFH est équilatéral et donc I est aussi le centre de gravité de AFH.

Exercice 14/15

1. Développer et réduire $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||$.
2. En déduire les formules de polarisation du cours.
3. On considère une pyramide SABCD à base carrée de sommet S, de hauteur $SA = 6,5$ cm et telle que $AB = 3,5$ cm.
   (a) Justifiez que (BC) et (SB) sont perpendiculaires.
   (b) Calculer la valeur exacte de SB et SC.
   (c) Calculer $\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{SC}$.
   (d) En déduire l'angle $\widehat{BSC}$ à 10^{-1} près.

Solution :

1. Voir cours
2. Voir cours
3. (a) (BC) est orthogonal à (AB) et (SA) est orthogonal à (BC) donc (BC) est orthogonal à (SAB) d'où le résultat.
   (b) $SB = \sqrt{54,5}$ et $SC = \sqrt{66,75}$
   (c) $\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{SC} = -54,5$ (utiliser la formule de polarisation)
   (d) $\widehat{BSC} \approx 25,4°$

Exercice 15/15

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan défini par le point $M(-1;1;0)$ et par le vecteur normal $\vec{n}(2;3;5)$.
Soit $A(1;-4;5)$.
On veut déterminer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$, c'est à dire la distance AH, où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ en fonction de la distance AH.
2. Calculer d'une autre façon $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|$.
3. En déduire la distance de A au plan $\mathcal{P}$.

Solution :

1. $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \sqrt{38} \times AH$
2. $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = 14$.
3. $AH = \dfrac{14}{\sqrt{38}} \approx 2,27$