Corrigé : Exercices

Cosinus et sinus

Exercice 1/23

En utilisant la notion de mesure principale, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)$.

Solution : $\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2/23

Simplifier l'expression suivante :

$$A(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Solution : $A(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) - 3\cos(x)$

Exercice 3/23

Transformer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ comme des expressions polynomiales, respectivement en $\cos(x)$, et $\sin(x)$.

Solution : $\cos(3x) = \cos(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - \sin(x)(2\sin(x)\cos(x)) = \cos^3(x) - \cos(x) + \cos^3(x) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$
De la même façon :
$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

Exercice 4/23

Linéariser (exprimer sans exposants),

$$\cos^3(x)$$

.

Solution : $\cos^3(x) = \cos^2(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\cos(x)(1+\cos(2x)) = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(x)\cos(2x) = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{4}(\cos(3x)+\cos(x)) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$

Exercice 5/23

Factoriser (écrire sous forme de produit),

$$f(x) = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x)$$

Solution : $f(x) = \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = (\sin(x) + \sin(4x)) + (\sin(2x) + \sin(3x)) = 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{3x}{2}\right)) = 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)2\cos(2x)\cos(x) = 4\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x)$

Exercice 6/23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Solution : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \iff 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
Donc $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$

Exercice 7/23

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation

$$2\sin(x) - \sqrt{3} < 0$$

.

Solution : $2\sin(x) - \sqrt{3} < 0 \iff \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right]$

Exercice 8/23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique

$$\cos(x) + \sin(x) = 1$$

Solution : $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$
Donc $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = 2k\pi$

Exercice 9/23

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$.

Solution : $\cos(x) = \frac{1}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ou $\cos(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
$S = \left]-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

Exercice 10/23

Déterminer de deux façons différentes la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

Solution :
Méthode 1 : utiliser le taux d'accroissement.
Méthode 2 : théorème des gendarmes.

Exercice 11/23 : *

Étudier la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{\sin(x)}$$

Solution :
$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{\cos(x)} - 1)(\sqrt{\cos(x)} + 1)}{\sin(x)(\sqrt{\cos(x)} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} \times \frac{x}{\sin(x)} \times \frac{1}{\sqrt{\cos(x)} + 1} = 0$

Exercice 12/23

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$

1. Montrer que f est 2π périodique.
2. Montrer que f est impaire.
3. Sur quel intervalle I peut-on alors réduire l'étude de la fonction ?
4. Comment obtenir alors la représentation graphique complète de la fonction ?
5. Étudier la fonction sur l'intervalle I.

Solution :

1. $f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} = f(x)$.
2. $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)} = f(x)$
3. $I = [0;\pi]$
4. Étude sur I puis symétrie par rapport à O, et translation de $2\pi\,\overrightarrow{i}$.

5. f est dérivable sur I, comme quotient de fonctions dérivables sur I. Pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(2+\cos(x)) + \sin^2(x)}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2}$$

Pour connaître le signe de $f'(x)$, nous allons résoudre l'inéquation suivante :

$$2\cos(x) + 1 \geq 0 \iff \cos(x) \geq -\frac{1}{2}$$

Donc dans I, on a $x \leq \frac{2\pi}{3}$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
f	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

Exercice 13/23

Réduire autant que possible le domaine d'étude de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(4x)$.

Solution :

Fonction paire et $\frac{\pi}{4}$ périodique : $I = [0; \frac{\pi}{8}]$

Exercice 14/23

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$.

1. Montrer que f est 2π périodique.
2. Montrer que f est paire.
3. En déduire un intervalle I d'étude suffisant.
4. Donner le tableau de variation de f sur I.
5. Tracer alors $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de f, sur $[-2\pi; 2\pi]$ en utilisant vos réponses aux questions précédentes.

Solution :

1. $f(x+2\pi) = \cos(2x+4\pi) - 2\cos(x+2\pi) = \cos(2x) - 2\cos(x) = f(x)$
2. $f(-x) = \cos(-2x) - 2\cos(-x) = \cos(2x) - 2\cos(x) = f(x)$.
3. $I = [0; \pi]$

4.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

Exercice 15/23

Démontrer l'"égalité suivante :

$$\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\cos(4x)=4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x)\cos\left(\frac{5x}{2}\right)$$

Solution :

$\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\cos(4x) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{3x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x)$
$= 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x)\cos\left(\frac{5x}{2}\right)$

Exercice 16/23

1. Linéariser $\cos^2(x)\sin^2(x)$.
2. Linéariser $\cos^3(x)\sin(x)$.
3. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Solution :

1. $\cos^2(x)\sin^2(x)=\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2=\frac{1}{4}\sin^2(2x)=\frac{1}{8}(1-\cos(4x))$.
2. $\cos^3(x)\sin(x)=\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{8}\sin(4x)$.
3. $\cos(5x)=16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x)$

Exercice 17/23

1. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :
   (a) $\sin(x)=\frac{1}{2}$
   (b) $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
   (c) $\sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (d) $\cos(x)=-1$
2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les inéquations suivantes :
   (a) $\sin(x)\leq-\frac{1}{2}$
   (b) $\cos(x)\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$
   (c) $\sin(x)<\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (d) $\cos(x)<1$

Solution :

1. (a) $x=\frac{\pi}{6}$ et $x=\frac{5\pi}{6}$
   (b) $x=\frac{\pi}{4}$ et $x=-\frac{\pi}{4}$
   (c) $x=-\frac{\pi}{3}$ et $x=-\frac{2\pi}{3}$
   (d) $x=\pi$

2. (a) $\left[-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}\right]$
   (b) $\left[-\dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$
   (c) $\left]-\pi; \dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right[$
   (d) $]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$

Exercice 18/23

Étudier le sens de variation de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. h est définie sur $\left[\dfrac{2}{\pi}; +\infty\right[$ par $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. f est définie sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 4x\right)$

Solution :

1. h est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{2}{\pi}; +\infty\right[$
2. f est strictement croissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{8}\right]$
   f est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{3\pi}{8}\right]$
   f est strictement croissante sur $\left[\dfrac{3\pi}{8}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 19/23

On appelle sinus cardinal la fonction, notée sinc, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$sinc(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $sinc$ est continue en 0.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $sinc(x) = 0$.
3. (a) Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $-\dfrac{1}{x} \leq sinc(x) \leq \dfrac{1}{x}$.
   En déduire la limite de la fonction $sinc$ en $+\infty$.
   (b) En procédant de manière analogue sur l'intervalle $]-\infty; 0[$, déterminer la limite de $sinc$ en $-\infty$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$sinc(x) = \frac{1}{x} \text{ et } sinc(x) = -\frac{1}{x}$$

5. Visualiser à la calculatrice la courbe représentative de la fonction sinc.

Solution :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
2. $x = 0 + k\pi$

3. (a) Théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0} sinc(x) = 0$
   (b) Théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to 0} sinc(x) = 0$
4. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
   $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

Exercice 20/23

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de $\dfrac{\sin(X)}{X}$.
2. Étudier alors la continuité de f en 0.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Visualiser à la calculatrice la courbe représentative de la fonction f.

Solution :A demander si besoin

Exercice 21/23

Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \cos(2x)$.

1. **Étude des variations de f**
   (a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in [0; \pi]$.
   (b) Résoudre sur $[0; \pi]$ l'équation $\sin(2x) = 0$.
   (c) En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $[0; \pi]$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$
3. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer l'équation des tangentes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
5. Tracer $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal, avec comme échelle en abscisse 1cm pour $\dfrac{\pi}{6}$.

Solution :

1. **Étude des variations de f**
   (a) $f'(x) = -2\sin(2x)$
   (b) $x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$

(c)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

2. $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$
3. $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$
4. $y = 1$ et $y = -1$

Exercice 22/23 : *

La fonction tangente est la fonction qui à x associe $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = 0$
2. En déduire l'ensemble de définition de la fonction tangente.
3. Montrer que la fonction tan est π périodique.
   Il suffit alors d'étudier la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Déterminer les limites de $\tan(x)$ aux bornes de l'intervalle.
5. Démontrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$
   En déduire les variations de la fonction de tangente.
6. Déterminer les valeurs de $\tan(0)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Solution : A demander si besoin.

Exercice 23/23

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \cos(x)$. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Montrer que pour tout réel x,
$$-e^x \leq f(x) \leq e^x$$
   En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Quelle est cette asymptote ?
2. Déterminer les abscisses des points d'intersections de $\mathcal{C}_{\{}$ avec l'axe des abscisses.
3. On étudie f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
   (a) Démontrer que pour tout réel x on a :
$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$
   (b) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f. Montrer que f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Dresser alors le tableau de variations de f.

4. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. Montrer que $f''(x) = -2e^x \sin(x)$. La fonction f est-elle convexe ? concave ?
5. Justifier que le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ atteint un maximum en $x = 0$. Préciser alors sa valeur.
6. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en O.

Solution :

1. Encadrer le cosinus entre -1 et 1. La fonction admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).
2. $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
3. (a) Utiliser $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
   (b) $f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) = e^x\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
4. f est convexe sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$ et concave sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Utiliser les variations de f' et montrer qu'elle admet un maximum de coordonnées $(0; 1)$.
6. $y = x + 1$