Corrigé : Exercices

PRIMITIVES

Exercice 1/18

Calculer les primitives des fonctions f définies et continues sur l'intervalle I à préciser :

1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$
3. $f(x) = -2x + 1$
4. $f(x) = 12x^5 - 2x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 1$

Solution :

1. $f(x) = 3x + C$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 + x$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = -x^2 + x$ sur $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = 2x^6 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{2}x^3 + x$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice 2/18

Calculer les primitives des fonctions f définies et continues sur l'intervalle I :

1. $f(x) = \dfrac{2}{x}$ avec $I =]0; +\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $I =]-\infty; 0[$
3. $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$ avec $I = \left]-\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ avec $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = e^{3x+1}$ avec $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = xe^{x^2}$ avec $I = \mathbb{R}$
7. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ avec $I =]0; +\infty[$
8. $f(x) = \dfrac{-6x-3}{\sqrt{x^2+x+1}}$ avec $I = \mathbb{R}$
9. $f(x) = \dfrac{1}{5-x}$ avec $I =]-\infty; 5[$
10. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
11. $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ avec $I = \mathbb{R}$

Solution :

1. $f(x) = 2\ln(x)$ avec $I =]0; +\infty[$
2. $f(x) = \ln(-x)$ avec $I =]-\infty; 0[$
3. $f(x) = \dfrac{1}{3}\ln(3x+2)$ avec $I = \left]-\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$
4. $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ avec $I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{3}e^{3x+1}$ avec $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2}$ avec $I = \mathbb{R}$
7. $f(x) = 6\sqrt{x}$ avec $I =]0; +\infty[$
8. $f(x) = 6\sqrt{x^2+x+1}$ avec $I = \mathbb{R}$
9. $f(x) = -\ln(5-x)$ avec $I =]-\infty; 5[$
10. $f(x) = -e^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$
11. $f(x) = -\dfrac{1}{e^x+1}$ avec $I = \mathbb{R}$

Exercice 3/18 : *

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+7x^2+5x+3}{(x^2+1)(x+2)^2}$.

1. Déterminer les réels $a,\ b,\ c,\ d$ tels que pour tout $x \neq -2$:
$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$
2. En déduire une primitive de f sur $]-2;+\infty[$, puis sur $]-\infty;-2[$.

Solution :

1. $a = b = c = 1$ et $d = 0$
2. $F(x) = \ln(x+2) - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ sur $]-2;+\infty[$.
   $F(x) = \ln(-x-2) - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ sur $]-\infty;-2[$.

Exercice 4/18

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(\ln(2x))^2}{x}$.

Solution :

$F(x) = \dfrac{1}{3}(\ln(2x))^3$

Exercice 5/18

Montrer que F définie sur $]-\infty;0[$ par $F(x) = \ln(-x)$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solution :

$F'(x) = \frac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$

Exercice 6/18

Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \ln(x^2+1)$.

1. Montrer que G est une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
2. Déterminer la primitive G_0 de g sur $\mathbb{R}$ vérifiant $G_0(-1) = 0$.

Solution :

1. $G'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
2. $G_0(-1) = 0$ donc $G_0(x) = \ln(x^2+1) - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)$

Exercice 7/18

Si on note $x(t)$ la position à l'instant t d'un objet qui se déplace en mouvement rectiligne, alors la vitesse instantannée au même instant t est donnée par $v(t) = x'(t)$ et son accélération par $a(t) = v'(t)$, soit aussi $a(t) = x''(t)$.
Juste après son départ, la vitesse d'un TGV passe de 61,2 km.h^{-1}, à l'instant $t = 0$, à 244,8 km.h^{-1} 150 secondes plus tard, avec une accélération constante.

1. Montrer que l'accélération du TGV durant ces 150 secondes est égale à 0,34 m.s^{-1}.
2. Déterminer la vitesse $v(t)$ du TGV en fonction du temps t.
3. Déterminer la position $x(t)$ du TGV en fonction du temps t.
4. Quelle distance le TGV a-t-il parcourue en 150 secondes ?

Solution :

1. $a(t) = \dfrac{68 - 17}{150} = 0,34$.
2. $v(t) = 0,34t + C$ avec $C = 17$ car $v(0) = 17$. Donc $v(t) = 0,34t + 17$
3. $x(t) = 0,17t^2 + 17t + C$ avec $C = 0$ car $x(0) = 0$. Donc $x(t) = 0,17t^2 + 17t$
4. $x(150) = 6375m = 6,375km$

Exercice 8/18

Déterminer des fonctions f telles que :

1. $f'(x) = 6x + 2$
2. $f'(x) = x^2 - 3x + 5$
3. $f'(x) = 2e^{4x}$
4. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
5. $f'(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^2}$

Solution :

1. $f(x) = 3x^2 + 2x$
2. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 5x$
3. $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{4x}$
4. $f(x) = \ln(x)$
5. $f'(x) = 5\ln(x) - \dfrac{2}{x}$

Exercice 9/18

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 + x - 6$
2. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x + 2$
3. $f(x) = 2x - 4 + \dfrac{3}{x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
6. $f(x) = \dfrac{5x^2}{(x^3+1)^2}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$
8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Solution :

1. $F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$
2. $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^2 + 2x$
3. $F(x) = x^2 - 4x - \frac{3}{x}$
4. $F(x) = -\frac{1}{x}$
5. $F(x) = -\frac{1}{x^2+1}$
6. $F(x) = -\frac{\frac{5}{3}}{x^3+1}$
7. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x+1)$
8. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

Exercice 10/18

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x) = \frac{3x^2+4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.
2. La fonction G définie sur I par $G(x) = \frac{3x^2-x-5}{x+1}$ est-elle une autre primitive de f sur I ?

Solution :

1. $F'(x) = \frac{(6x+4)(x+1)-(3x^2+4x)}{(x+1)^2} = \frac{6x^2+6x+4x+4-3x^2-4x}{(x+1)^2} = \frac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$
2. $\frac{3x^2+4x}{x+1} - 5 = \frac{3x^2+4x-5x-5}{x+1} = \frac{3x^2-x-5}{x+1}$ donc $G(x) = F(x) - 5$...

Exercice 11/18

Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$ telle que $F(1) = 0$.

Solution : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2x - \frac{1}{3}$

Exercice 12/18

Déterminer la primitive G de $g : x \mapsto 12x^5 - 9x^2 + 6x - 3$ telle que $G(0) = 4$.

Solution : $G(x) = 2x^6 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 4$

Exercice 13/18

Déterminer la primitive H de $h : x \mapsto \frac{4}{(2x+1)^2}$ telle que $H\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Solution :
$H(x) = -\frac{2}{2x+1} + 3 = \frac{-2+6x+3}{2x+1} = \frac{6x+1}{2x+1}$

Exercice 14/18

Soit la fonction f définie sur $I =]0; +\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x + 4$.

1. Montrer que F est une primitive de $f(x) = \ln(x)$ sur I.

2. Déterminer la primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(e) = -1$.

Solution :

1. $F'(x) = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.
2. $F_0(e) = -1$ donc $F(x) = x\ln(x) - x - 1$

Exercice 15/18

Déterminer toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants. Puis déterminer la primitive F_0 qui vérifie la condition donnée.

1. $f(x) = (1-4x)e^{x-2x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$. Avec $F_0\left(\dfrac{1}{2}\right) = -3$.
2. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^4+4x+11}$ sur $I = [0;\infty[$. Avec $F_0(1) = \ln(2)$.
3. $f(x) = (2x^5 - x^2)e^{x^6-x^3}$ sur $I = \mathbb{R}$. Avec $F_0(0) = \dfrac{4}{3}$.

Solution :

1. $F(x) = e^{x-2x^2} - 4$
2. $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(x^4+4x+11)$
3. $F(x) = \dfrac{1}{3}e^{x^6-x^3} + 1$

Exercice 16/18

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I :

1. (a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$
   (b) $f(x) = \cos(x) - \sin(x) + 3$ avec $I = \mathbb{R}$
   (c) $f(x) = 4e^x - 1$ avec $I = \mathbb{R}$
   (d) $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-5}{x^2}$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$
2. (a) $f(x) = 3e^{3x+1}$ avec $I = \mathbb{R}$
   (b) $f(x) = 2(x^3-2x)(3x^2-2)$ avec $I = \mathbb{R}$
   (c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ avec $I = \mathbb{R}$
   (d) $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$ avec $I = \mathbb{R}$

Solution :

1. (a) $F(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x^2}$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$
   (b) $F(x) = \sin(x) + \cos(x) + 3x$ avec $I = \mathbb{R}$
   (c) $F(x) = 4e^x - x$ avec $I = \mathbb{R}$
   (d) $F(x) = 2x + 3\ln(x) + \dfrac{5}{x}$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$
2. (a) $F(x) = e^{3x+1}$ avec $I = \mathbb{R}$
   (b) $F(x) = (x^3-2x)^2$ avec $I = \mathbb{R}$
   (c) $F(x) = \ln(x^2+x+1)$ avec $I = \mathbb{R}$
   (d) $F(x) = \dfrac{1}{3}\sin^3(x)$ avec $I = \mathbb{R}$

Exercice 17/18 : *

1. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = (4x^2+1)(x+1)$.
2. Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$.

3. Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.
4. Déterminer la primitive de $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ sur $]-1;+\infty[$ qui s'annule en 2.

Solution :

1. $F(x) = x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{x^2}{2} + x + C$
2. $F(x) = \ln(-x)$
3. $F(x) = \ln(|x|)$
4. $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) - \ln(3)$ (écrire $f(x) = \dfrac{x^2-1+1}{1+x}$)

Exercice 18/18 : **

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-2}$.
2. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = (t-1)e^{-t}$.

Solution :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-2} = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+1}\right)$
   donc $F(x) = \dfrac{1}{3}(\ln(x-2) - \ln(x+1))$
2. $G(t) = -te^{-t}$