Corrigé : Exercices

ED

Exercice 1/21

Vérifier si les fonctions suivantes sont solutions ou non sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante

1. $y' = 2y + e^x$ et $f(x) = -ex$
2. $y' + 2y = 6x + 5$ et $f(x) = 3x + 1$
3. $y' + y - x - 1 = 0$ et $f(t) = x$

Solution :

1. Oui
2. Oui
3. Oui

Exercice 2/21

Vérifier si les fonctions suivantes sont solutions ou non sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante

1. $y \times y' = x$ et $f(x) = x$
2. $y' - 2x \times y = 0$ et $f(x) = e^{-x^2}$
3. $y'' + y = 0$ et $f(t) = \cos(t)$

Solution :

1. Oui
2. Non
3. Oui

Exercice 3/21 : Équations homogènes

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$
2. $y' = -2y$
3. $y' + 5y = 0$
4. $3y' + 6y = 0$
5. $y' - 2y = 0$
6. $5y' - 2y = 0$
7. $y = 3y'$
8. $-4y' - 12y = 0$
9. $-2y' + y = 0$
10. $y' = 0$

Solution :

1. $y = Ce^{3x}$
2. $y = Ce^{-2x}$
3. $y = Ce^{-5x}$
4. $y = Ce^{-2x}$
5. $y = Ce^{2x}$
6. $y = Ce^{\frac{2}{5}x}$
7. $y = Ce^{\frac{1}{3}x}$
8. $y = Ce^{-3x}$
9. $y = Ce^{\frac{1}{2}x}$
10. $y = C$

Exercice 4/21

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = -y$
2. $y' = \dfrac{1}{2}y$
3. $y' + y = 0$
4. $y' = 4y$
5. $3y' + y = 0$

Solution :

1. $y = Ce^{-x}$
2. $y = Ce^{\frac{1}{2}x}$
3. $y = Ce^{-x}$
4. $y = Ce^{4x}$
5. $y = Ce^{-\frac{1}{3}x}$

Exercice 5/21

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 2y + 1$
2. $y' = \dfrac{1}{3}y + \dfrac{2}{3}$
3. $y' + 2y = 3$
4. $y' - 6 = 5y$
5. $y = 3y' + 6$

Solution :

1. $y = Ce^{2x} - \dfrac{1}{2}$
2. $y = Ce^{\frac{1}{3}x} - 2$
3. $y = Ce^{-2x} + \dfrac{3}{2}$
4. $y = Ce^{5x} - \dfrac{6}{5}$
5. $y = Ce^{\frac{1}{3}x} + 6$

Exercice 6/21

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + e^{3x} = 1$
2. $y = 4y'$
3. $y - y' = 0$
4. $y' = 3y + 12$
5. $5y' - y = 10$

Solution :

1. $y = x - \dfrac{1}{3}e^{3x} + C$
2. $y = Ce^{\frac{1}{4}x}$
3. $y = Ce^{x}$
4. $y = Ce^{3x} - 4$
5. $y = Ce^{\frac{1}{5}x} - 10$

Exercice 7/21 : Problème de Cauchy

Dans chaque cas déterminer la solution f de léquation :

1. $y' = 3y$ avec $f(0) = 2$
2. $2y' = y$ avec $f(\ln(9) = 2$
3. $2y' + y = 0$ avec $f(2) = e$

Solution :

1. $y = 2e^{3x}$
2. $y = \dfrac{2}{3}e^{\frac{1}{2}x}$
3. $y = e^{-\frac{1}{2}x+2}$

Exercice 8/21 : Problème de Cauchy

Dans chaque cas déterminer la solution f de léquation :

1. $y' + 7y = 0$ avec $f(1) = 1$
2. $y' = 0,2y - 3$ avec $f(0) = 1$

Solution :

1. $y = e^{-7x+7}$ avec $f(1) = 1$
2. $y = -14e^{0,2x} + 15$ avec $f(0) = 1$

Exercice 9/21

Dans chaque cas, donner toutes les solutions, puis la solution répondant au problème de Cauchy :

1. $2y' - y = 3$ avec $y(1) = 1$
2. $y' - 6y = 8$ avec $y(0) = 1$

Solution :

1. $y = 4e^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} - 3$
2. $y = \dfrac{7}{3}e^{6x} - \dfrac{4}{3}$

Exercice 10/21

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = -3y$
2. $y' + 5y = 8$
3. $3y' - y = 2$
4. $\begin{cases} y' - y & = 1 \\ y(0) & = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2y' - 5y & = 1 \\ y(1) & = 7 \end{cases}$

Solution :

1. $y = Ce^{-3x}$
2. $y = Ce^{-5x} + \dfrac{8}{5}$
3. $3y' - y = 2$ $y = Ce^{\frac{1}{3}x} - 2$
4. $y = e^x - 1$
5. $y = \dfrac{36}{5}e^{\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}} - \dfrac{1}{5}$

Exercice 11/21

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -y + 2$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. En déduire la solution f de l'équation différentielle (E) qui s'annule en 0.

Solution :

1. $y = Ce^{-x} + 2$
2. $y = -2e^{-x} + 2$

Exercice 12/21

On considère l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$, où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
2. Le plan est muni d'un repère.
   Déterminer la solution f de (E), dont la courbe représentative C_f dans ce repère passe par le point $A(\ln(9); 1)$.

Solution :

1. $y = Ce^{-\frac{1}{2}x}$

2. $y = 3e^{-\frac{1}{2}x}$

Exercice 13/21

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y' - 2y = 3x - 1$$

.

1. Démontrer que, si f est une solution définie sur $\mathbb{R}$ de (E), alors f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est solution de $(E_0)\ :\ y' = 2y + 3$.
2. Résoudre (E_0).
3. En déduire la solution f de (E) telle que $f(0) = 5$.

Solution :

1. Si f est solution de (E), alors $f'(x) - 2f(x) = 3x - 1$.
   $f'(x) = 2f(x) + 2x - 1$, donc f' est dérivable et $f''(x) = 2f'(x) + 2$. f' est solution de $y' = 2y + 2$.
2. $y = Ce^{2x} - \dfrac{3}{2}$
3. $y = C_1 \times \dfrac{1}{2}e^{2x} - \dfrac{3}{2}x + C_2$
   $f(x) = \dfrac{21}{4}e^{2x} - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{4}$

Exercice 14/21 : *

L'objectif de cet exercices est de résoudre l'équation différentielle (E) :

$$5y' - 7y = x^2 + 1$$

.

1. Déterminer les réels $a,\ b,\ c$ pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E_0) :

   $$5y' - 7y = 0$$

   .
3. Résoudre (E_0).
4. En déduire les solutions de (E).

Solution :

A demander si besoin.

Exercice 15/21

Partie A :

On considère la fonction w définie pour tous réels positifs t par :

$$w(t) = 4e^{-200t} + 146$$

1. Calculer $w(0)$
2. Déterminer la limite de la fonction w lorsque t tend vers $+\infty$.
3. Étudier le sens de variation de w sur $[0; +\infty[$.

Partie B :
On étudie l'évolution de la vitesse d'un moteur dont la vitesse de rotation à vide est de 150 rad/s. Durant l'embrayage, la vitesse de rotation du moteur, exprimée en rad/sec, est modélisée par une fonction solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \frac{1}{200}y' + y = 146$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t positive, exprimée en secondes.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Vérifier que la fonction w étudiée dans la partie A est la fonction solution de (E) vérifiant la condition initiale $w(0) = 150$.
3. Interpréter la limite de $w(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, ainsi que le sens de variation déterminé dans la partie A.
4. On considère que la vitesse de rotation du moteur est stabilisée lorsque la quantité $\dfrac{w(t) - 146}{146}$ est inférieur à 0,01. Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième de seconde.

Solution :

1. $w(0) = 150$
2. 146
3. Décroissante

1. $y = Ce^{-200t} + 146$
2. $C = 4$
3.
4. $\dfrac{4e^{-200t}}{146} \leq 0,01$ donc $t \geq \dfrac{1}{-200} \times \ln(0,365)$ donc $t \geq 0,005$.

Exercice 16/21

Le taux de décroissance radioactive, proportionnel au nombre de noyaux radioactifs N donné, pour tout $t \geq 0$, par l'expression :

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\lambda N(t), \text{ soit } N'(t) = -\lambda N(t)$$

où λ est la constante radioactive positive et t est exprimé en années.

1. Exprimer le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs présents à l'instant t sachant que $N(0) = N_0$.
2. La période de demi-vie T représente le temps au bout duquel la moitié des noyaux radioactifs présents se sont désintégrés.
   Exprimer T en fonction de λ.
3. **Application numérique : datation au carbone 14**

(a) La période du carbone 14 est de 5568 ans.
Que vaut la constante radioactive λ ?

(b) On a trouvé en 2006 dans un site archéologique des ossements humains dont la teneur en carbone 14 est égal à 35% de celle des os d'un être humain en vie.
Déterminer la date de la mort de cet humain.

Solution :

1. $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$
2. $T = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$
3. (a) $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{5568} \approx 1,245 \times 10^{-4}$.
   (b) $t = 8432$ donc en -6 426 av J.-C.

Exercice 17/21

Un circuit RL comprend en série un générateur de tension constante E, une bobine d'inductance L et une résistance R.
L'intensité du courant électrique i dans le circuit RL est fonction du temps t, exprimé en seconde, et solution de l'équation différentielle :

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(E - Ri)$$

où R, E et L sont des constantes strictement positives.

1. Déterminer la solution i de cette équation différentielle sachant que :

$$i(0) = 0$$

2. Étudier les variations de i.

Solution :

1. $i(t) = \dfrac{E}{L}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$
2. i est strictement croissante.

Exercice 18/21

On lâche une bille dans un puits à sec de 15 mètres à l'instant initial 0.
On note t_0 l'instant où la bille atteint le fond du puits.
On néglige les frottements de l'air.
On choisit un repère $(O; \vec{j})$, où O est le fond du puits et $\vec{j}$ un vecteur dirigé vers le haut.
D'après le principe fondamental de la dynamique, la trajectoire y est solution de $y''(t) = -g$, où g est l'unité de l'accélération de la pesanteur ($g = 9,81\ m.s^{-1}$ sur terre).

1. Calculer, pour tout $t \in [0; t_0]$, la vitesse $v(t)$ et la trajectoire $y(t)$.
2. Calculer t_0 à 10^{-2} près.

Solution :

1. $y(t) = -4,905t^2 + 15$
2. $t_0 = \sqrt{\dfrac{15}{4,905}} \approx 1,75$ s

Exercice 19/21

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle (E) :

$$3y' - 2y = 13\cos(x)$$

.

1. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x)$ est une solution particulière de (E).
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E_0) :

$$3y' - 2y = 0$$

3. En déduire les solutions de (E).

Solution :

1.
2. f solution de (E) et g également, donc $3f' - 2f = 3g' - 2g$...
3. $y = 3\sin(x) - 2\cos(x) + Ce^{\frac{2}{3}x}$

Exercice 20/21

Partie A : résolution d'une équation différentielle

L'objectif de cette partie est de trouver toutes les solutions strictement positives de l'équation différentielle (1) : $y' = ay - by^2$ où a, b sont des constantes strictement positives.

1. Démontrer qu'une fonction f strictement positive est solution de (1) si, et seulement si, $g = \dfrac{1}{f}$ est strictement positive et solution de l'équation différentielle (2) : $y' = -ay - b$.
2. Résoudre l'équation différentielle (2).
3. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{Ce^{-ax} + \dfrac{b}{a}}$ avec $C \geq 0$

Partie B : Évolution d'une population de bactéries

1. Au cours d'une expérience, on étudie la taille $N(t)$ d'une population de bactéries à l'instant t (t est exprimé en minutes). On remarque que l'évolution de la taille N est solution de l'équation différentielle :

$$N'(t) = 0,04N(t) \text{ avec } t \geq 0$$

   (a) Sachant que $N(0) = 100$, donner l'expression de $N(t)$ en fonction de t.

   (b) Combien d'individus (arrondi à 1 près) compte cette population au bout d'une minute ?

   (c) Quelle est la limite de $N(t)$ quand t tend vers $+\infty$?

2. Le nombre de bactérie ne peut croître indéfiniment. En pratique, le nombre est limité à un maximum M qui dépend des conditions expérimentales (volume du milieu, concentration en éléments nutritifs,...)
   L'évolution du nombre N de bactéries sur une longue période est solution en fait de

l'équation différentielle (F) :

$$N' = 0,04N \times \frac{M-N}{M} \text{ et } N(0) = 100$$

Ici, on choisit $M = 10^6$

(a) A l'aide de la partie A, déterminer la solution N de l'équation différentielle (F).

(b) Étudier les variations de la fonction N.

(c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries atteint-il la moitié du maximum M (arrondir le résultat à la minute) ?

Solution :A demander si besoin

Exercice 21/21

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

On considère l'équation différentielle

$$(E) \;:\; y' + y = e^{-x}$$

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$.
   Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'"équation différentielle $(E') \;:\; y' + y = 0$
   Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de léquation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie II

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.
On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = (x+k)e^{-x}$$

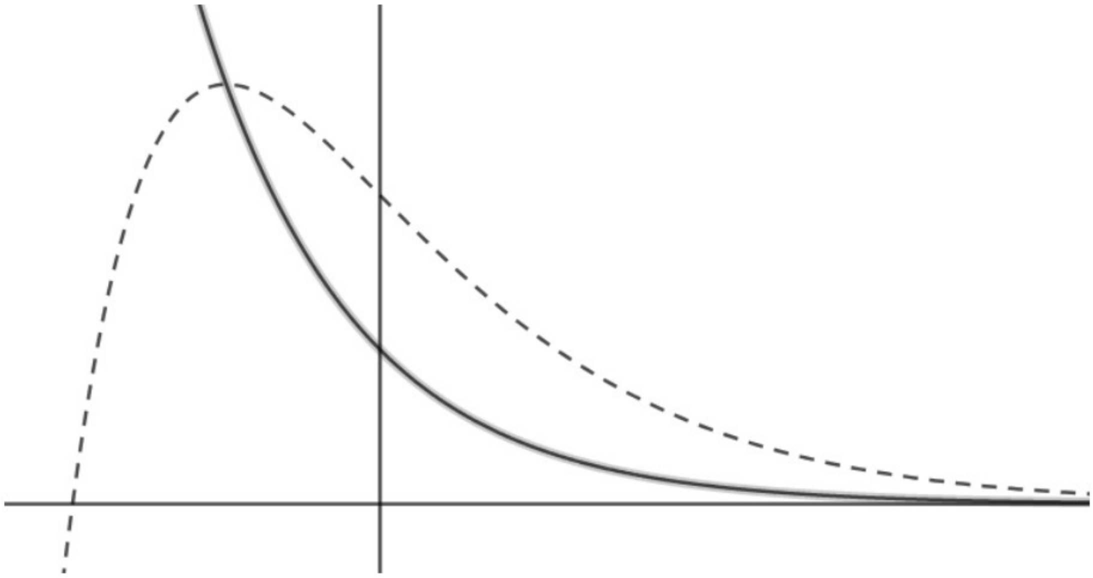
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h.
On a représenté sur le graphique en annexe les courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}$ sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes

1. Sur le graphique en annexe à rendre avec la copie, l'une des courbes est en traits pointillés, l'autre est en trait plein. Laquelle est la courbe $\mathcal{C}$?
2. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer sur l'annexe à rendre avec la copie l'unité sur chacun des axes du graphique.

Annexe



Solution :

Cliquer ici