Corrigé : Évaluation

Combinatoire et dénombrement

Exercice 1/4

Nathan participe à une course régionale qui oppose 50 concurrents.

1. Combien de classements sont possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles où figure Nathan ?
4. Les trois premiers concurrents sont qualifiés pour la finale nationale. Combien de groupes peuvent se qualifier pour la finale ?
5. Combien d'anagramme pour le mot " Nathan " ?

Solution :

1. $50!$
2. $50 \times 49 \times 48 = 117600$
3. $49 \times 48 = 2352$
4. $\binom{50}{3} = 19600$

Exercice 2/4

1. Définir le cardinal d'un ensemble et rappeler le nombre de parties dans un ensemble à n éléments.
2. On donne $\binom{15}{3} = 455$ et $\binom{16}{3} = 560$. Déterminer **sans calculatrice**, et en justifiant :
   (a) $\binom{15}{12}$ (b) $\binom{15}{2}$
3. Déterminer **sans calculatrice**, et en justifiant $\binom{4}{2}$.
4. Déterminer **sans calculatrice**, et en justifiant (à l'aide de factorielles) $\binom{12}{2}$

Solution :

1. $\binom{15}{12} = 455$ et $\binom{15}{2} = 105$

2. $\binom{4}{2} = 6$
3. $\binom{12}{2} = \dfrac{12 \times 11}{2} = 66$

Exercice 3/4

Une compagnie de théâtre compte 12 filles et 4 garçons. Le directeur de la compagnie choisit qui interprétera les 3 rôles principaux.

1. Combien y-a-t-il de trios possibles ?
2. Combien y-a-t-il de trios possibles si le premier rôle doit être joué par un garçon ?
3. Combien y-a-t-il de trios possibles si les deux sexes doivent être présents dans le trio ?

Solution :

1. $\binom{16}{3} = 560$
2. $4 \times \binom{15}{2} = 420$
3. $\binom{16}{3} - \binom{12}{3} - \binom{4}{3} = 336$

Exercice 4/4

Pour accéder au réseau du lycée, chaque éléve se voit attribuer un code à 4 caractères (parmi les 26 lettres de l'alphabet et les chiffres de 0 à 9). Paul ne connaît pas son code. Il décide de taper 4 caractères au hasard, distincts ou non, chacun ayant la même probabilité d'être choisi. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   (a) A : « Paul tape le bon code ».
   (b) B : « Paul tape le mot Paul ».
   (c) B : « Paul tape les 4 caractères de son code »(pas forcément dans le bon ordre).
   (d) C : « Le deuxième caractère tapé par Paul est un chiffre ».
2. Le voisin de Paul lui rappelle que tous les caractères sont distincts. Paul tape cette fois 4 caractères distincts au hasard.
   Déterminer la probabilités des événements suivants :
   (a) E : « Paul tape le bon code ».
   (b) F : « Paul tape exactement 3 chiffres ».
   (c) G : « Paul a exactement deux caractères bien placés ».

Solution :

1. (a) $\dfrac{1}{36^4} = \dfrac{1}{1679616}$
   (b) Idem
   (c) $\dfrac{4!}{1679616} = \dfrac{1}{69984}$
   (d) $\dfrac{36 \times 10 \times 36 \times 36}{1679616} = \dfrac{5}{18}$

2. (a) $\dfrac{1}{36 \times 35 \times 34 \times 33} = \dfrac{1}{1413720}$

   (b) 4 positions possibles pour la lettre $\dfrac{4 \times 10 \times 9 \times 8 \times 26}{1413720} = \dfrac{208}{3927}$

   (c)
   - $\binom{4}{2} = 6$ façon de choisir quels caractères seront bien placés.
   - 32×31 caractères non présents dans le code
   - 2×32 couples avec un caractère présent mais non positionné correctement et un caractère non présent.
   - 1 fois les deux bon caractères mais mal positionnés.

   $\dfrac{151}{33600}$