Corrigé : Exercices

Injection, surjection bijection

Exercice 1/12

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Soit $A = [-1; 4]$. Déterminer :
   (a) l'image directe de A par f ;
   (b) l'image réciproque de A par f ;
2. On considère la fonction sin définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Quelle est l'image directe par sin de $\mathbb{R}$? De $[0; 2\pi]$? De $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?
   Quelle est l'image réciproque par sin de $[0; 1]$? De $[3; 4]$? De $[1; 2]$?

Solution :

1. (a) $[0; 16]$
   (b) $[-2; 2]$
2. $[-1; 1]$. $[-1; 1]$. $[0; 1]$
   $\bigcup[2k\pi; \pi + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   $\emptyset$
   $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2/12

1. Soient f et g les deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 1$$

   Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Dans les exemples suivants déterminer les deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$.

   (a) $h_1(x) = \sqrt{3x - 1}$ (b) $h_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (c) $h_3(x) = \frac{1}{x + 7}$

Solution :

1. $f \circ g(x) = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2$ et $g \circ f(x) = (3x + 1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x$

Exercice 3/12

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $\begin{array}{rccc} f_1 & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & & n & \mapsto & 2n \end{array}$
2. $\begin{array}{rccc} f_2 & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & & n & \mapsto & -n \end{array}$
3. $\begin{array}{rccc} f_3 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$
4. $\begin{array}{rccc} f_4 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$

Solution :
f_1 est injective, non surjective (et donc non bijective) : 1 n'a pas d'antécédents. f_2 est bijective. f_3 n'est ni injective ($f(1) = f(1) = 1$), ni surjective (1 n'a pas d'antécédents). f_4 et f_5 sont surjectives, mais non injectives.

Exercice 4/12

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & n+1 \end{array}$
2. $\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & & n & \mapsto & n+1 \end{array}$
3. $\begin{array}{rccc} h & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x;y) & \mapsto & (x+y;x-y) \end{array}$

Solution :

1. f est clairement injective, mais n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
2. g est bijective : l'équation $n+1=k$, avec $k \in \mathbb{Z}$ admet une unique solution $n \in \mathbb{Z}$ qui vaut $n = k1$.
3. h est bijective : prenons en effet un couple (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$, et essayons de résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y &= x_1 \\ x-y &= y_1 \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution, l'application est bijective.

Exercice 5/12

L'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x;y) & \mapsto & (x+y;xy) \end{array}$$

est-elle injective ? Surjective ?

Solution :
L'application f n'est pas injective. Cela se démontre facilement en utilisant la symétrie entre les variables x et y. Ainsi, $f(1,2) = f(2,1) = (3,2)$, alors que $(1,2) \neq (2,1)$. L'application f n'est pas non plus surjective. C'est un petit peu plus difficile à démontrer. On peut prouver que l'équation $f(x,y) = (0,1)$ n'a pas de solutions. En effet, s'il y avait une solution, on aurait $xy = 1$ et donc $x = 1/y$. Reportant ceci dans l'équation $x + y = 0$, on obtiendrait $x + \dfrac{1}{x} = 0 \iff x^2 + 1 = 0$, ce qui est impossible. Donc f n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 6/12

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si x est pair} \\ 0 & \text{si x est impair} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Les fonctions f et g sont-elles injectives ? Surjectives ? bijectives ?

Solution : On a $g \circ f(x) = g(2x)$. Mais $2x$ est pair, et donc $g(2x) = (2x)/2 = x$. Ainsi, $g \circ f(x) = x$. D'autre part, si x est pair,on a $f \circ g(x) = f(x/2) = x$. Si x est impair, $f \circ g(x) = f(0) = 0$. En particulier, on a $f \circ g \neq g \circ f$ puisque $f \circ g(1) = 0$ alors que $g \circ f(1) = 1$.f n'est pas surjective, car les nombres impairs ne sont pas des valeurs prises par f. En revanche, f est injective car si $f(x) = f(y)$, on a $2x = 2y$ et donc $x = y$.g n'est pas injective, car $g(1) = g(3) = 0$ alors que $1 \neq 3$. En revanche, $g$est surjective. Prenons en effet y n'importe quel entier naturel. Alors, $2y$ est pair et $g(2y) = (2y)/2 = y$.Des deux études précédentes, on déduit par définition que ni$f$ ni g ne sont bijectives.

Exercice 7/12

Soit

$$\begin{array}{rccc} g & : & [0;+\infty[& \to & [0;1[\\ & & x & \mapsto & \dfrac{x}{1+x} \end{array}$$

Démontrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Solution :cliquer ici

Exercice 8/12

Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$.
3. Montrer que la restriction

$$\begin{array}{rccc} g & : & [-1;1] & \to & [-1;1] \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est une bijection.

Solution :
cliquer ici

Exercice 9/12

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective ;
2. $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f^{-1}(f(A)) = A$;
3. $\forall A, A' \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$;
4. $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f\left(C_E A\right) \subset C_F f(A)$

Solution :
cliquer ici

Exercice 10/12

Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est surjective ;
2. $\forall B \in \mathcal{P}(F) \quad f(f^{-1}(B)) = B$;
3. $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f\left(C_E A\right) \supset C_F f(A)$

Solution :
cliquer ici

Exercice 11/12

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Démontrer que :

1. si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective ;
2. si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective ;
3. si $g \circ f$ est injective alors f est injective ;
4. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective ;
5. si $g \circ f$ est injective et si f est surjective alors g est injective ;
6. si $g \circ f$ est surjective et si g est injective alors f est surjective ;
7. $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h le sont.

Solution :cliquer ici

Exercice 12/12

Soit $i : A \to B$ une injection. On suppose $A \neq \varnothing$.

1. Montrer qu'il existe une application $s : B \to A$ telle que $s \circ i = \mathrm{id}_A$
2. En déduire que :
   (a) pour toute application $f : A \to C$, il existe une application $g : B \to C$ telle $f = g \circ i$;
   (b) i est simplifiable à gauche, c'est-à-dire $\forall C \quad \forall h, h' : C \to A \quad (i \circ h = i \circ h' \Rightarrow h = h')$;
   (c) si $A \neq \varnothing$ et s'il existe une injection de A dans B, alors il existe une surjection de B dans A.
3. Qu'en est-il si $A = \varnothing$?
4. Montrer que réciproquement, toute application simplifiable à gauche est injective.

Solution :cliquer ici