Version 230314

2022/2023

Calcul intégral

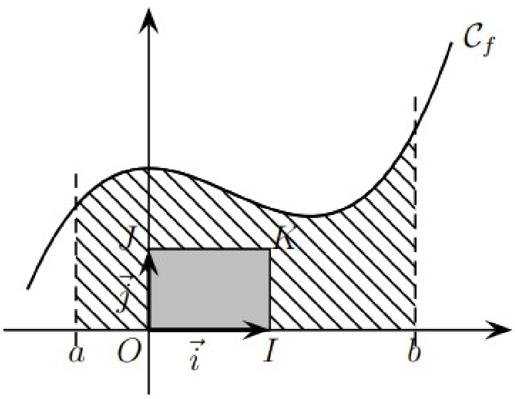
I Définition de l'intégrale : aire sous la courbe

Soit f une fonction "continue" et positive sur un intervalle $[a;b]$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On cherche à déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

L'unité d'aire est donnée par le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$: l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$.



Définition

Cette aire s'appelle **l'intégrale de la fonction f de a à b** ; on la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Remarque

Le "x" dans "dx" indique la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs : c'est la variable d'intégration.
C'est une variable dite muette : la lettre qui la désigne n'a pas d'importance :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = \ \dots$$

Cette notation est celle aussi rencontrée pour la dérivée (plus souvent en physique) : $f' = \dfrac{df}{dx}$, en électricité : $i = \dfrac{dq}{dt}$ ou encore en mécanique : $v = \dfrac{dx}{dt}$ ...

I.1 Exercices

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x$. Représenter $\mathcal{C}_f$ et calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2

Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_1^3 (2x-1)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_{-1}^1 (-2t+3)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x)=2x+1$.

Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 0$, la fonction $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

II Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition

Une fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
Une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Une fonction est continue en un point lorsque $f(x)$ prend des valeurs aussi proches que l'on veut de $f(a)$ dès que x est suffisamment proche de a.
Elle est continue sur un intervalle entier si elle l'est en tous les points de celui-ci : graphiquement, la courbe représentative d'une fonction continue est un trait "continu" obtenu "d'un seul trait", sans lever le crayon.

Propriété

Les fonctions polynômes, rationnelles, racines carrées, logarithme et exponentielle, et trigonométriques, sinus et cosinus, sont continues sur leur ensemble de définition.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et F une primitive de f sur I, alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

II.1 Exercices

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$.

a. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.

b. En déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercices 2

Calculer les intégrales :

a. $\displaystyle\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_1^3 2x - 1\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_{-1}^1 2t + 3\,\mathrm{d}t$

d. $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$

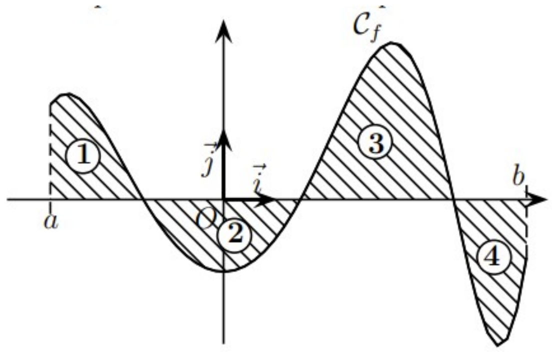
e. $\displaystyle\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$

f. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

g. $\displaystyle\int_0^\pi cos(x)\,\mathrm{d}x$

D'une manière plus générale, pour une fonction f quelconque (continue mais pas forcément positive), l'intégrale de f sur $[a;b]$ est l'aire **algébrique** du domaine compris entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
L'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2) + \text{aire}(\mathcal{D}_3) - \text{aire}(\mathcal{D}_4)$$



On convient de plus que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ En résumé, l'intégrale d'une fonction est l'aire algébrique, comptée positivement de gauche à droite (dans le sens croissant sur l'axe des abscisses) et au-dessus de l'axe des abscisses.
Si on souhaite calculer une aire géométrique, on calcule l'intégrale de f sur chacun des sous domaines où f est de signe constant et on ajoute les valeurs absolues de ces aires.

Remarque

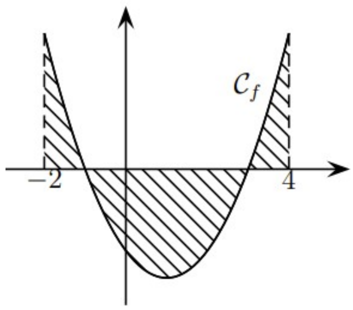
II.2 Exercices

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$, et on note $\mathcal{C}_f$ a courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. Donner le tableau de signes de $f(x)$.

b. Calculer l'aire du domaine hachuré sur la figure ci-contre.



Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4$. Calculer l'intégrale $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

Représenter l'allure de la courbe représentative de f et interpréter graphiquement le résultat précédent.

Valeur moyenne d'une fonction :
Soit f continue sur $[a;b]$, avec $a < b$, alors la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le nombre

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Définition

Exercice

Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

a. $f(x) = x^2$ sur $[0;1]$
b. $g(x) = (2-x)(x-1)$ sur $[-1;0]$
c. $h(x) = e^x$ sur $[0;1]$
d. $k(x) = e^{-3x+1}$ sur $[-1;1]$
e. $l(x) = \dfrac{2}{3x+1}$ sur $[0;3]$
f. $m(x) = \dfrac{5}{(2x+3)^2}$ sur $[0;1]$

III Propriétés de l'intégrale

Propriété

Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a;b]$ et tout réel λ,

- $\displaystyle\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

Exercice

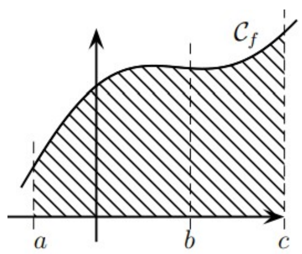
Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 (x^3 + \frac{2}{x})\,dx$ et $J = \displaystyle\int_1^2 (\frac{3}{x^2} - \frac{2}{2x+1})\,dx$

Propriété

Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue sur $[a;c]$, et soit b un réel de $[a;c]$, alors

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$



Propriété

Positivité :

- Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

Propriété

Ordre et inégalité :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

IV Intégrale et primitive

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$.
Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est **l'unique primitive de f sur I s'annulant en a**

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{2x^2+1}$.

Déterminer une expression de la fonction F définie par $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$.

Exercice 2 :

Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Déterminer le sens de variation de F.

V Aire d'un domaine délimité par deux courbes

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$, alors l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ vaut

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

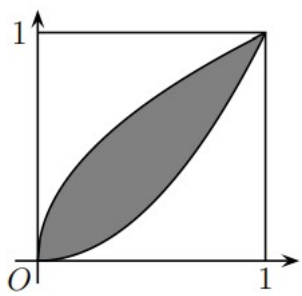
ou encore, en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

V.1 Exercices :

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.
Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.
(On pourra se rappeler que $\sqrt{x} = x^{1/2}$, donc de la forme x^n, afin de chercher une primitive).



Exercice 2 :

Calculer les intégrales :

a. $I = \displaystyle\int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + x)\,dx$

b. $I = \displaystyle\int_2^5 3\,dx$

c. $I = \displaystyle\int_0^3 dx$

d. $I = \displaystyle\int_{-1}^1 2r^3\,dr$

e. $I = \displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$

f. $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$

g. $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{(2x+3)^2}\right)dx$

h. $I = \displaystyle\int_1^2 \left(x + 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$

i. $I = \displaystyle\int_1^3 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx$

j. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$

k. $I = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx$

l. $I = \displaystyle\int_{-1}^1 (2e^x + 1)\,dx$

m. $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x}\,dx$

n. $I = \displaystyle\int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx$

o. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - \sin x)\, dx$ q. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t + \frac{\pi}{6})\, dx$ r. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

p. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x)\, dx$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-2}{x^2-1}$.

a. Vérifier que, pour tout x de $]1; +\infty[$, on a $f(x) = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_2^4 \frac{4x-2}{x^2-1}$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x, $f(x) = a + \frac{be^x}{1+e^x}$.

En déduire $\int_0^2 f(x)\, dx$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - x$.

a. Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b. En déduire l'intégrale $I = \int_1^e \ln x\, dx$.

Exercice 6 :

a. Montrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ est une primitive de la fonction $f : x \longmapsto x \ln x$.

b. En déduire $\int_1^{\sqrt{e}} x \ln x\, dx$.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (2t+1)e^{-t}$.

a. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = (-2t-3)e^{-t}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^1 f(t)\, dt$.

c. On définie la fonction G pour $x \geqslant 0$ par $G(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

(a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

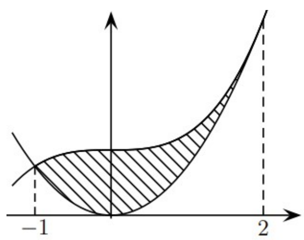
(b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

(c) Tracer dans un repère l'allure de la courbe représentative de la fonction f, et interpréter à l'aide de ce graphique la valeur $G(x)$ pour un nombre $x \geqslant 0$.

(d) Déterminer la limite de G en $+\infty$.

Exercice 8 :

Calculer l'aire du domaine, hachuré sur la figure ci-contre, délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = x^3 + 4$ et $g(x) = 3x^2$.



Exercice 9 :

Une chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène suspendu par ses extrémités à deux points fixes.

On admet que que la chaînette est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$.

a. Calculer la fonction dérivée f' de f.

b. Étudier alors le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

c. Tracer l'allure de la chaînette.

d. On admet que la longueur L de la chaînette (déformée et étirée sous l'action de son poids) est égale à l'intégrale $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx$.

   (a) En les calculant séparément, montrer que les deux expressions $1 + |f'(x)|^2$ et $|2f(x)|^2$ sont égales.

   (b) En déduire la longueur L de la chaînette.

Exercice 10 :

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 - 2\ln x$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

a. La courbe $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α.
   Déterminer la valeur exacte du réel α.

b. Calculer la fonction dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g.

c. Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{x}$.

a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
   En déduire le sens de variation de f.

c. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

   (Indication : on pourra écrire $f(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x + \dfrac{1}{x}$).

d. Soit $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)\, dx$. Calculer I, et en donner une valeur approchée au centième.