Version 210910

2021/2022

Calcul algébrique

I Rappels sur les sommes de termes et les produits de facteurs

Exemples

- une somme de terme : $x + 3$
- un produit de facteurs : $(\mathbf{2x+1})(\mathbf{5x-3})$ (**facteurs**).

Somme de termes — Différence de termes

Remarque

Un quotient est le produit du numérateur et de l'inverse du dénominateur :

$$(\mathbf{2x+1}) \times \frac{1}{\mathbf{5x-3}} = \frac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{5x-3}}$$

Pour certains quotients, il existe des valeurs de x interdites, se sont celles qui annulent le dénominateur.

Exemple

Soit $P(x) = \frac{x}{4-x}$ pour $x = 4$, $4 - x = 0$. Il n'est donc pas possible de calculer $P(4)$.

II Développement et factorisation

II.1 Distributivité (développement)

Définition

Développer
c'est transformer un produit en une somme (ou différence) de termes.

Factoriser
c'est transformer une somme en un produit de facteurs.

$$x(5-y) \underset{\text{factorisation}}{\overset{\text{développement}}{=}} 5x - xy$$

Vocabulaire :
On dit que la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition (ou la soustraction).

II.2 Double-distributivité

On distribue a

$$(a+b)(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$$

On distribue b

II.3 Factoriser

Pour factoriser une expression il faut trouver un **facteur commun**.

Exemple

$$3x+9 = \mathbf{3}x + \mathbf{3}\times 3 = \mathbf{3}(x+3)$$

Parfois le facteur commun est une expression.

Exemple

$$(3x+9)\times(\mathbf{x+1}) + \mathbf{x+1} = (\mathbf{x+1})\times(3x+9+1) = (\mathbf{x+1})\times(3x+10)$$

III Identités remarquables

Propriété

Pour tous nombres réels a et b, on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple

$$(x-5)^2 = x^2 - 2\times x\times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$
$$(2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x - 1$$
$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\times 3\times x + 3^2 = (x+3)^2$$

IV Réduire au même dénominateur

Propriété

Pour tout nombre a, b, c et d, réels on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Exemple

$$\frac{1+x}{3+x} + \frac{1}{3-x} = \frac{(1+x)(3-x)}{(3+x)(3-x)} + \frac{3+x}{(3+x)(3-x)} = \frac{3-x^2+2x+3+x}{9-x^2} = \frac{-x^2+3x+6}{9-x^2}$$