Exercices

Arithmétique 2

Exercice 1/40

Les nombres 87, 113, 147 et 183 sont-ils des nombres premiers ?

Exercice 2/40

Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers : 45, 398 et 1600.

Exercice 3/40

Décomposer 12400 en produit de facteurs premiers.

Exercice 4/40

1. Décomposer en facteurs premiers les nombres 24, 76, 1785 et 3045.
2. En déduire la forme irréductible des fractions $\frac{24}{76}$ et $\frac{3045}{1785}$.

Exercice 5/40

En utilisant le crible dÉratosthène, dresser la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

Exercice 6/40

Les nombres premiers inférieurs à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43. Expliquer pourquoi 2017 est un nombre premier.

Exercice 7/40

Donner le nombre de diviseurs de $a = 2^3 \times 3^2 \times 7$ et de $b = 2 \times 5 \times 11^3$.

Exercice 8/40

La suite (u_n) définie par $u_n = 6n + 5$ est-elle constituée uniquement de nombres premiers ?

Exercice 9/40

Montrer que, quel que soit l'entier $n \geq 3$, le nombre $n^2 + 2n - 3$ n'est jamais premier.

Exercice 10/40

1. Vérifier l'identité dite « de Sophie Germain » : $n^4+4m^4=(n^2+2m^2+2mn)(n^2+2m^2-2mn)$.
2. Pour quelles valeurs de n l'entier n^4+4 est-il premier ?

Exercice 11/40

Déterminer le PGCD des nombres 6732 et 342 en utilisant la méthode des divisions successives.

Exercice 12/40

Déterminer le PGCD des nombres 18 459 et 3 809 en utilisant la méthode des divisions successives.

Exercice 13/40

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 240.
2. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 36.
3. En déduire le PGCD de 240 et 36.

Exercice 14/40

1. Décomposer 5400 en produit de facteurs premiers.
2. Décomposer 4200 en produit de facteurs premiers.
3. En déduire le PGCD de 5400 et 4200.

Exercice 15/40

En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer $\text{PGCD}(12345; 567)$.

Exercice 16/40

Démontrer que 1234 et 56789 sont premiers entre eux.

Exercice 17/40

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\dfrac{n+1}{2n+3}$ est irréductible.

Exercice 18/40

Déterminer les entiers naturels a et b tel que $\text{PGCD}(a,b)=9$ et $a+b=72$.

Exercice 19/40

Déterminer les entiers naturels a et b tel que $\text{PGCD}(a,b)=11$ et $ab=10164$.

Exercice 20/40

Déterminer a et b deux entiers naturels, tel que $\mathrm{PGCD}(a;b) = 17$ et $a^2 - b^2 = 1445$.

Exercice 21/40

Dans chaque cas, justifier l'existence d'un couple (u, v) vérifiant l'égalité donnée.

1. $2u + 7v = 1$
2. $17u - 29v = 1$
3. $19u + 5v = 1$

Exercice 22/40

Déterminer tous les entiers m et n tels que :

1. $63m = 45n$
2. $19m = 29n$
3. $21m = 19n$

Exercice 23/40

1. Justifier qu'il existe des entiers x et y tels que $23x - 18y = 1$.
2. Trouver deux entiers x_0 et y_0 tels que $23x_0 - 18y_0 = 1$.
3. On veut en déduire tous les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$23x - 18y = 1$$

   (a) Montrer que $(x; y)$ est solution de l'équation $23x - 18y = 1$ si, et seulement si $23(x - x_0) = 18(y - y_0)$.
   (b) Justifier qu'il existe deux entiers k et k' tels que $x - x_0 = 18k$ et $y - y_0 = 23k'$.
   (c) Réciproquement, démontrer qu'un couple $(x_0 + 18k; y_0 + 23k')$ est solution si $k = k'$.
   (d) Conclure.

Exercice 24/40

1. Vérifier que le couple $(4; 6)$ est une solution de l'équation $(E)\ \ 11x - 5y = 14$.
2. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ vérifiant l'équation (E).

Exercice 25/40

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ tel que $37x_0 + 23y_0 = 1$.
2. En utilisant ce couple particulier, déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $37x + 23y = 1$.

Exercice 26/40

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 3n^2 + 2n$ et $b_n = 2n^2 + n$, déterminer $PGCD(a_n, b_n)$.

Exercice 27/40

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $1665x + 1035y = 45$.

Exercice 28/40 : *

Montrer que 24 est le plus petit entier naturel n, à partir duquel tous les entiers naturels n s'écrivent $5a + 7b$ où a et b sont des entiers naturels.

Exercice 29/40

Pour tout entier naturel n, on définit le nombre $u_n = 5^n + 6^n$, calculer alors $PGCD(u_n, u_{n+1})$.

Exercice 30/40

On suppose que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.

1. Démontrer qu'il en est de même de $\frac{a+b}{ab}$.
2. En déduire que $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ est également irréductible.

Exercice 31/40

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les nombres réels a_n et b_n tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel et en déduire que a_n et b_n sont uniques.
2. Montrer que a_n et b_n sont des entiers naturels premiers entre eux.

Exercice 32/40

Existe-t-il des entiers relatifs n tels que $\frac{n-6}{15}$ et $\frac{n-5}{12}$ soient des entiers relatifs ?

Exercice 33/40

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $a^2 + b^2 = 85113$ et $ab = 1764PGCD(a, b)$.

Exercice 34/40

1. Montrer que 2003 est un nombre premier.
2. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $123u + 2003v = 1$.
3. En déduire un entier relatif k_0 tel que : $123k_0 \equiv 1[2003]$.
4. Montrer que, pour tout entier relatif x, $123x \equiv 456[2003]$ si, et seulement si, $x \equiv 456k_0[2003]$.
5. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x \equiv 456[2003]$.
6. Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $1 \leq n \leq 2002$ et $123n \equiv 456[2003]$.

Exercice 35/40

Montrer que si p est un nombre premier, $p \geq 5$, alors $24|p^2 - 1$.

Exercice 36/40

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $2^n + 1 = m^2$.
   (a) Montrer qu'il existe deux entiers naturels p et q tels que : $0 \leq p > q \leq n$, $p + q = n$ et $m = 2^p + 1 = 2^q - 1$.
   (b) En déduire que $p = q - p = 1$. Que vaut alors n ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n + 1$ est-il un carré ?

Exercice 37/40

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel k, $7|10^{6k+4} + 3$.
2. Démontrer que pour tout nombre premier n, n divise $1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+...+(n-1)^{n-1}+1$.

Exercice 38/40 : *

Pour tout entier naturel n, on définit le **nombre de Fermat** $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Montrer que si p est un entier naturel pair et x un entier relatif, alors $x + 1|x^p - 1$.
2. Montrer que pour tous les entiers naturels m et n avec $m \neq n$, on a $PGCD(F_m, F_n) = 1$.
3. En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 39/40

Démontrer que pour tout entier naturel a, $a^{37} - a$ est divisible par 1 919 190.

Exercice 40/40

Soit x, y et z trois entiers naturels strictement positifs. On dit que $(x; y; z)$ forment un triplet pythagoricien si : $x^2 + y^2 = z^2$.

1. (a) Démontrer, en étudiant tous les cas possibles, qu'aucun carré n'est congru à 2 modulo 4.
   (b) En déduire que x et y ne peuvent pas être impairs tous les deux.
   Dans toute la suite, on suppose que y est pair.
   (c) Démontrer que x et z ont même parité.
2. Étude d'un exemple : posons $y = 12$.
   (a) Déterminer tous les couples $(x; z)$ d'entiers naturels qui satisfont à la relation $x^2 + y^2 = z^2$.
   (b) Parmi les triplets déterminés ci-dessus, quels sont ceux pour lesquels x, y et z n'ont aucun diviseur commun positif autre que 1 ?
   On appellera désormais un tel triplet « triplet pythagoricien primitif » ou encore TPP.
3. On suppose ici que x, y et z forment un TPP.
   (a) Démontrer que x et z sont premiers entre eux.
   (b) On pose $y = 2p$, avec $p \in \mathbb{N}$. Démontrer que $p^2 = \dfrac{z+x}{2} \times \dfrac{z-x}{2}$.
   (c) Démontrer que $\dfrac{z+x}{2}$ et $\dfrac{z-x}{2}$ sont deux entiers naturels premiers entre eux.

(d) En déduire qu'il existe deux entiers naturels u et v tels que $\dfrac{z+x}{2} = u^2$ et $\dfrac{z-x}{2} = v^2$.

(e) Justifier que u et v sont premiers entre eux, de parités différentes, et que $u > v$.

4. (a) Démontrer qu'on a : $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$.

   (b) Réciproquement démontrer que si les entiers naturels u et v sont premiers entre eux, de parités différentes avec $u > v$, alors $(u^2 - v^2; 2uv; u^2 + v^2)$ est un TPP.

5. (a) Soit d le plus grand diviseur commun à x, y et z. Vérifier que si x, y et z forment un triplet pythagoricien, alors le triplet $\dfrac{x}{d}$, $\dfrac{y}{d}$ et $\dfrac{z}{d}$ est un TPP.

   (b) En déduire la forme générale d'un triplet pythagoricien.