

NOTION DE FONCTION

I Définition et notation

Soit D une partie de l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} .

Fonction

Une fonction f définie sur D associe à tout nombre réel x de D un unique nombre réel, noté $f(x)$.

Ensemble de définition

D est appelé l'ensemble de définition de la fonction f : c'est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est définie (ou existe)..

Définitions

On note :

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Et on lit "La fonction f , définie pour x appartenant à D ($x \in D$), qui à un nombre x associe le nombre $f(x)$ ".

I.1 Image, antécédent

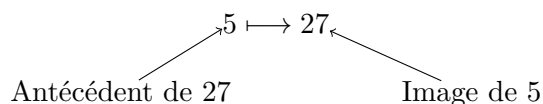
Exemple

Pour la fonction $f(x) = x^2 + 2$:

$$f(5) = 27 \text{ et } f(-1) = 3$$

On dit que :

- l'image de 5 par la fonction f est 27.
- Un antécédent de 27 par la fonction f est 5.



- Un nombre possède une unique image.
- Cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

Remarque

Exemple

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \sqrt{x} + 1$

a. Compléter le tableau de valeurs :

x	4	10,24	16	20,25
$\sqrt{x} + 1$				

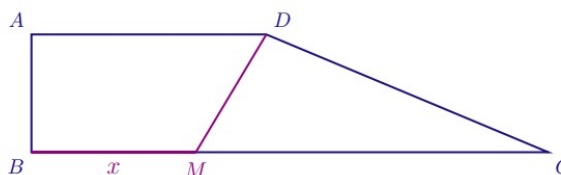
b. Compléter :

- (a) L'image de 4 par f est
- (b) Un antécédent de 5 par f est
- (c) $f : \dots \mapsto 4, 2$
- (d) $f(20, 25) = \dots$

I.2 Quelques exercices

a. **Exercice 1**

$ABCD$ est un trapèze rectangle tel que $AB = 5$, $AD = 10$ et $BC = 22$. M est un point du segment $[BC]$.



On pose $x = BM$. Soit f la fonction telle que $f(x) = DM$.

On ne cherche pas ici à donner l'expression algébrique $f(x)$ de la fonction f en fonction de x .

- (a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
- (b) Déterminer $f(0)$, $f(10)$ et $f(22)$.
- (c) Détailler comment varie $f(x)$ lorsque x augmente.

Représenter graphiquement ces détails à l'aide d'un graphique et/ou d'un tableau représentant les variations.

- (d) 7 a-t-il un antécédent par f ?

b. **Exercice 2**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 12x + 11$.

- (a) Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = (x - 11)(x - 1)$.
- (b) Déterminer l'image de 3 par la fonction f .
Déterminer de même l'image de -2 par f .
- (c) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f .

Déterminer de même les antécédents éventuels de 11 par f .

c. **Exercice 3**

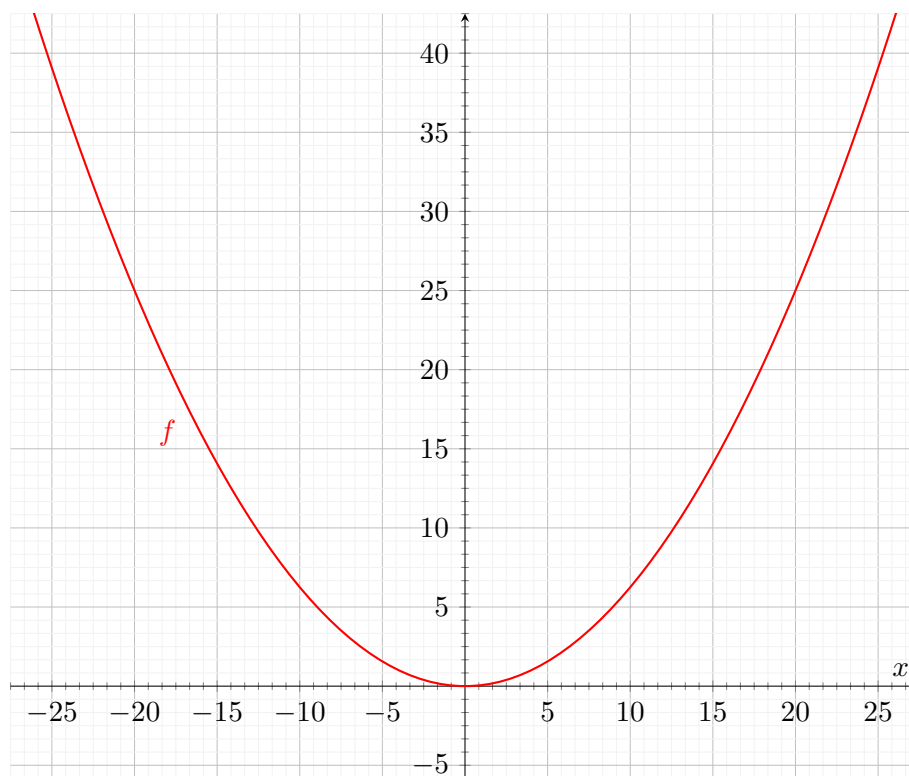
Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 6x - 20$.

- (a) Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = 2(x + 2)(x - 5)$.
- (b) Déterminer l'image de -2 par la fonction f .
Déterminer de même l'image de -3 par f .
- (c) Déterminer les antécédents éventuels de -20 par f .

Déterminer de même les antécédents éventuels de 0 par f .

II Représentation graphique d'une fonction

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur D :



On peut dire que l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ avec $y = f(x)$ et $x \in D$ définissent la courbe représentative de la fonction f .

On dira que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe.

La courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient $y = f(x)$ avec $x \in D$.

Définition

II.1 Exercice

- a. Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

Indiquer les points qui appartiennent à \mathcal{C}_f :

$A(0; 2)$; $B(1; 1)$; $C(-2; 4)$; $D(-3; 29)$; $E(10; 172)$; $F(125; 30\ 877)$.

Placer ces points dans un repère et tracer une courbe \mathcal{C}_f possible.

- b. Soit la fonction g définie par l'expression $g(x) = \frac{x+6}{x-2}$.

Indiquer les points qui appartiennent à \mathcal{C}_g :

$A(0; -3)$; $B(1; -7)$; $C(-1; -2,5)$; $D(2; 8)$; $E(-2; -1)$; $F(6; 3)$; $G(3; 10)$; $H(4; 5)$

Placer ces points dans un repère et tracer une courbe \mathcal{C}_g possible.

III Variation d'une fonction

Un des objectifs principaux de l'étude d'une fonction est de déterminer son **sens de variation** et ses extremums.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . a et b deux nombres réels de I .

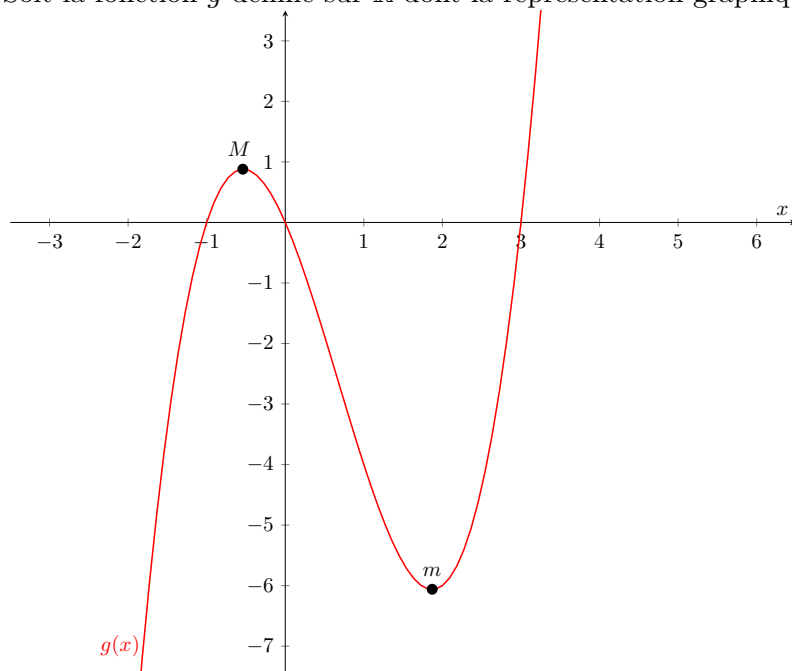
Dire que f admet **un maximum** M en a , tel que $f(a) = M$, sur I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f(x) \leq M$

Dire que f admet **un minimum** m en b , tel que $f(b) = m$, sur I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f(x) \geq m$

Un **extremum** est soit un minimum, soit un maximum.

Exemple

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} dont la représentation graphique et donnée ci-dessous :



g admet un maximum M sur l'intervalle $[-1, 0]$ atteint en $(-0,5; 1)$.

g admet un minimum m sur l'intervalle $[0, 3]$ atteint en $(2; -6)$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- Dire que f est **croissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

- Dire que f est **décroissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$

- Dire que f est **constante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$

- Dire que f est **monotone** sur I signifie que f est soit croissante sur I , soit décroissante sur I .

la fonction g définie précédemment. g est croissante sur $] -\infty; -0,5]$, décroissante sur $[-0,5; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone et les éventuels extremums

Pour la fonction g , on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-0.5	2	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	1	-6	$+\infty$

III.1 Exercices

a. Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $[-10; 10]$ par l'expression $g(x) = 2x - 3$.

Tracer l'allure de la courbe \mathcal{C}_g à l'aide d'une calculatrice (ou ordinateur...) et donner le tableau de variation correspondant.

b. Exercice 2

Soit h la fonction définie sur $[0; 15]$ par l'expression $h(x) = x^2 + 6x - 3$

Tracer l'allure de la courbe \mathcal{C}_h à l'aide d'une calculatrice (ou ordinateur...) et donner le tableau de variation correspondant.

c. Exercice 3

Soit k la fonction définie sur $[-4; 7]$ par l'expression $k(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Tracer l'allure de la courbe \mathcal{C}_k à l'aide d'une calculatrice (ou ordinateur...) et donner le tableau de variation correspondant.

IV Taux de variation

Taux de variation (variation relative) :

Le taux de variation de la fonction f entre a et b est le nombre : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Variation absolue :

la variation absolue de f entre M_1 et M_2 est $y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$.

- Le taux de variation est le coefficient directeur de la droite (M_1M_2)
- Si pour tous réels distincts x_1 et x_2 , le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est positif, alors f est croissante
- Si pour tous réels distincts x_1 et x_2 , le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est négatif, alors f est décroissante.

Exemple

On considère la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ et la fonction cube, $g : x \mapsto x^3$, définies sur \mathbb{R} . Calculer les taux de variation de f et de g , puis les comparer entre :

- a. 0 et 1 b. 0 et 2 c. 0 et 4 d. -1 et 0 e. -2 et -1

V Les fonctions affines

Définition

Une fonction affine f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = mx + p$ où m est le **coefficient directeur** et p est **l'ordonnée à l'origine** de la droite représentative.

Lorsque $p = 0$, la fonction f définie par $f(x) = mx$ est **une fonction linéaire**.

La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite** (passant par l'origine si la fonction est linéaire).

Dans le cas d'une fonction constante, cette droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Propriété

Soit f une fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x) = mx + p$.

Si $m > 0$, f est croissante sur \mathbb{R} .

Si $m < 0$, f est décroissante sur \mathbb{R} .

Si $m = 0$, f est constante sur \mathbb{R} .

Exemple

Construire le tableau de variations et le tableau de signe des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto 2x + 4$

b. $g : x \mapsto x - 4$

c. $h : x \mapsto -6x - 3$

Déterminer l'expression de la fonction affine dont la courbe passe par les points $A(-2; -2)$ et $B(1; 7)$.

Exercice

Donner les tableaux de signes des expressions affines :

a) $3x + 6$

b) $2x + 8$

c) $-2x + 4$

d) $-6x - 3$

e) $x + 2$

f) $-x + 7$

g) $2x$

h) x

i) $-x$

j) $3 - 6x$

k) $2 + 3x$

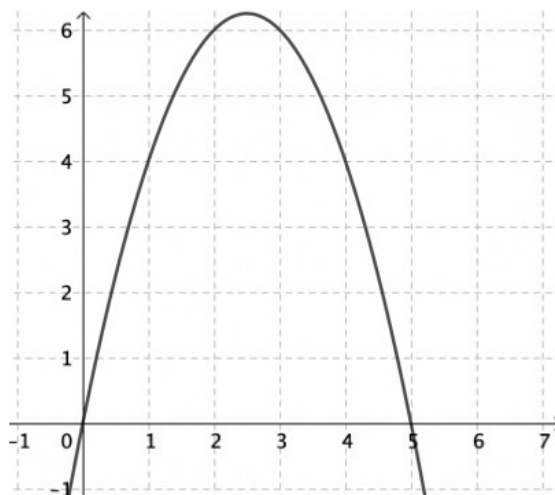
l) $-8 - 3x$

VI Résolution graphique d'équations et d'inéquations

VI.1 Résolution graphique d'équations

Exemple

On a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$. Résoudre graphiquement l'équation $5x - x^2 = 4$.



- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- L'équation $f(x) = 7$, par exemple, ne semble pas avoir de solution car la courbe représentée ne possède pas de point d'ordonnée 7.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

Remarque

Exemple 1

On cherche à résoudre l'équation $E : 2x^2 - 6 = 1$. On introduit la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 6$.

- Tracer l'allure de \mathcal{C}_f et résoudre approximativement l'équation E .
- Résoudre algébriquement E , en isolant tout d'abord le terme x^2 .

Exemple 2

On cherche à résoudre l'équation $E : 2x^3 - 6 = 1$. On introduit la fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 6$.

- Tracer l'allure de \mathcal{C}_f et résoudre approximativement l'équation E .
- Résoudre algébriquement E , en isolant tout d'abord le terme x^3 .

Fonction carré

Pour un réel a positif, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.

Fonction cube

Pour un réel a , l'équation $x^3 = a$ admet une unique solution $x = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

Propriété

Résoudre les équations :

- | | | | | |
|--------------|---------------|-------------------|-------------------|-------------------------|
| a) $x^2 = 7$ | b) $x^2 = -3$ | c) $3x^2 = 6$ | d) $2x^2 + 4 = 8$ | e) $3x^2 + 6 = 3$ |
| f) $x^3 = 7$ | g) $x^3 = -8$ | h) $2x^3 + 3 = 7$ | i) $-3x^3 = 9$ | j) $2x^3 + 3 = x^3 + 2$ |

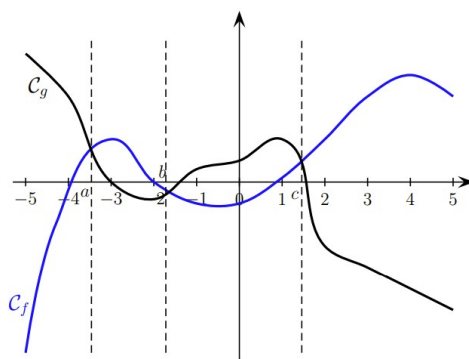
VI.2 Résolution graphique (et un peu algébrique) d'inéquations

Exemple

Dans la méthode précédente, on a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$. Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 4$.

Étudier la position relative de deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , c'est déterminer quelle courbe est au-dessous ou au-dessus de l'autre.

Par exemple pour des fonctions f et g définies sur $[-5; 5]$, telles que :



On a,

- \mathcal{C}_f est au-dessous de \mathcal{C}_g sur $[-5; a]$ et sur $[b; c]$
- \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g sur $[a; b]$ et sur $[c; 5]$.

Définition

Propriété

- | | |
|---|--|
| • \mathcal{C}_f est au-dessous de \mathcal{C}_g | • \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g |
| $\iff f(x) \leq g(x)$ | $\iff f(x) \geq g(x)$ |
| $\iff f(x) - g(x) \leq 0$ | $\iff f(x) - g(x) \geq 0$ |
| $\iff d(x) = f(x) - g(x)$ négatif | $\iff d(x) = f(x) - g(x)$ positif |

Ainsi, étudier la position relative des deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g est équivalent à étudier le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x)$.

VI.3 Exercices

Exercice

Soit $f(x) = -2x - 2$ et $g(x) = 6x - 2$

- Représenter graphiquement les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et étudier graphiquement leur position relative.
- Étudier précisément, algébriquement, leur position relative.