Version 210923

2021/2022

Puissances et racines carrées

I Les puissances

Définition

On définit la puissance n d'un nombre a par :

$$a^n = a \times a \times ... \times a \text{ avec } n \text{ facteurs } a$$

Exemples

- $5^8 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$
- $2^3 = 2 \times 2 \times 2$

Cas particuliers à connaître :

- $a^1 = a$ pour tout nombre a
- $a^0 = 1$ pour tout nombre a (non nul)
- $0^p = 0$ pour tout nombre p (non nul)
- $1^p = 1$ pour tout nombre p

Un piège à éviter :

$$-5^4 = -5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$$ **le résultat sera négatif !**

$$(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$$ **le résultat sera positif !**

Propriété

Règles de calcul avec les puissances : Pour a réel non nul, n et p des entiers naturels

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^n \times a^p = a^{n+p}$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad (a^n)^p = a^{n \times p} \qquad (a \times a)^p = a^p \times a^p$$

Exemples

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5 \qquad 2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} \qquad \frac{5^2}{5^9} = 5^{2-9} = 5^{-7}$$

II Les racines carrées

Définition

La racine carrée du nombre **positif** a (notée $\sqrt{a}$) est le nombre dont le carré est a.

Une racine est toujours positive !

Exemples

$\sqrt{0}=0$ $\sqrt{1}=1$ $\sqrt{2}\approx 1,4142$ $\sqrt{3}\approx 1,732$

$\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels.

Racines de carrés parfaits :
Les racines de carrés parfaits sont les racines entières :

$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{100}=10$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{121}=11$
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{144}=12$
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{169}=13$

Propriété

Pour un nombre a positif, on $\sqrt{a^2}=a$

Pour un nombre a négatif, on $\sqrt{a^2}=-a$

Règles de calcul et inégalité :
Soit a réel positif et b réel positif non nul, alors :

Régles de calcul :

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \qquad (\sqrt{a})^2=a$$

Inégalité :
$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$
Avec égalité si et seulement si, au moins un des deux nombres est nul

Démonstration

Montrons que $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$:
D'une part :
$$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2=a\times b$$
D'autre part :
$$(\sqrt{a\times b})^2=a\times b \text{ (car } a \text{ et } b \text{ sont positifs)}$$
Donc $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a\times b})^2$ et donc $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

⚠ $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$.

Démonstration

Montrons que $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$:

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$

D'une part :

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$$

D'autre part :

$$(\sqrt{a+b})^2 = a + b$$

Donc $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$ car $2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$

Ainsi $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

Si $a = 0$ ou $b = 0$

Alors $2\sqrt{a}\sqrt{b} = 0$

On a donc $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a+b}$

On a finalement bien montré que :$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ avec égalité si a ou b est nul.