Version 211109

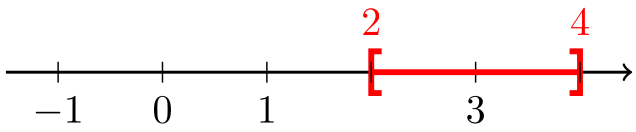
2021/2022

Intervalles et valeurs absolues

I Intervalles de $\mathbb{R}$

I.1 Introduction

L'ensemble de tous les nombres réels x compris entre 2 et 4, c'est à dire $2 \leq x \leq 4$, peut se représenter sur une droite graduée :



Cet ensemble est appelé un **intervalle** et se note : $[2, 4]$

Remarques

- Un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de réels.
- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter $]-\infty, +\infty[$

Attention, "∞" n'est pas un nombre !

Exemple

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note : $[-2, 7]$.
On a par exemple :

$$-2 \leq 4 \leq 7 \text{ donc } 4 \in [-2, 7]$$
$$-2 \leq -1 \leq 7 \text{ donc } -1 \in [-2, 7]$$
$$8 > 7 \text{ donc } 8 \notin [-2, 7]$$

Définition

Intervalle fermé
On dit qu'un intervalle est fermé si ses bornes appartiennent à l'intervalle.
On note $[a, b]$

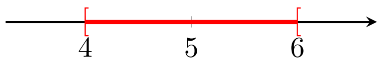
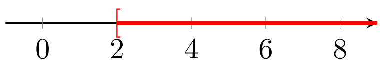
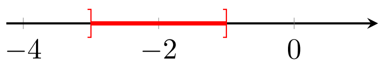
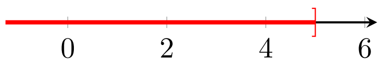
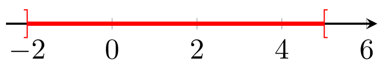
Intervalle ouvert
On dit qu'il est ouvert dans le cas contraire.
On note $]a, b[$

Exemples

- L'intervalle $[-5, 6]$ est un intervalle fermé.
  On a : $-5 \in [-5, 6]$ et $6 \in [-5, 6]$
- L'intervalle $]2, 6[$ est un intervalle ouvert.
  On a : $2 \notin]2, 6[$ et $6 \notin]2, 6[$
- L'intervalle $[2; 3[$ est un intervalle semi ouvert à droite.
  On a : $2 \in [2; 3[$ et $3 \notin [2; 3[$

Lorsqu'il n'y a pas de borne inférieure ou supérieure à un intervalle, c'est à dire quand l'intervalle comporte un "$+\infty$" ou "$-\infty$", il est **obligatoirement ouvert** du côté du signe infinie.

$[2;+\infty[$ ou $]-\infty;-1]$ mais **jamais** $[2;+\infty]$ ou $[-\infty;-1]$

Notation d'intervalle	Inégalité(s) correspondante(s)	Représentation sur une droite graduée	Phrase
$x \in [-3,5]$	$-3 \leq x \leq 5$		Ensemble des nombres compris entre -3 inclus et 4 inclus.
$x \in]-\infty,3]$	$x < 3$		Ensemble des nombres strictement inférieur à 3.
$x \in [4,6[$	$4 \leq x < 6$		Ensemble des nombres compris entre 4 inclus et 6 exclu
$x \in [2,+\infty[$	$x \geq 2$		Ensemble des nombres supérieurs ou égaux à 2.
$x \in [-3,-1[$	$-3 < x \leq -1$		Ensemble des nombres compris entre -3 exclu et -1 inclus.
$x \in]-\infty,5]$	$x \leq 5$		Ensemble des nombres inférieurs ou égaux à 5.
$x \in]-2,5[$	$-2 < x < 5$		Ensemble des nombres compris entre -2 exclu et 5 exclu.

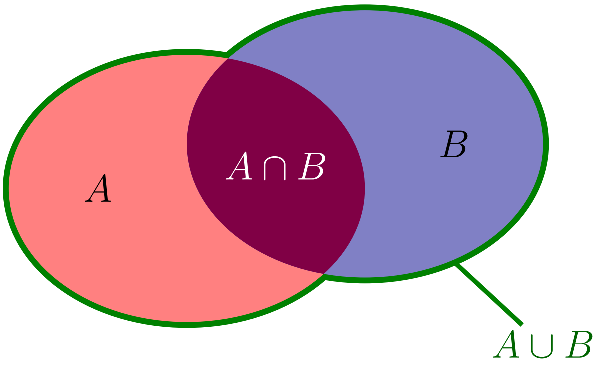
Remarque

- $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels privé de 0.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs ou nuls.
- $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des réels strictement positifs.
- $\mathbb{R}_-$ est l'ensemble des réels négatifs ou nuls.
- $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ est l'ensemble des réels privé de 2.

I.2 Intersections et réunions d'ensembles

Intersection
L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B et se note $A \cap B$.

Réunion
La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note $A \cup B$.

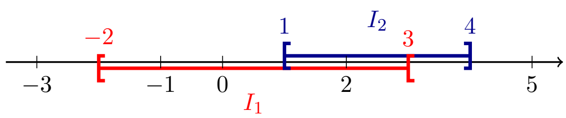


Définition

I.3 Réunion et intersection d'ensembles

Si on note I_1 l'intervalle $[-2, 3[$ et I_2 l'intervalle $[1, 4]$, alors on a :

$I_1 \cup I_2 = [-2, 4]$
$I_1 \cap I_2 = [1, 3[$



- $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$
- $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$
- $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$
- $\mathbb{R}\backslash\{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

Remarque

II Valeur absolue d'un réel

II.1 Définition

Valeur absolue
La valeur absolue d'un nombre a est égal au nombre a si a est positif, et au nombre $-a$ si a est négatif.
La valeur absolue de a se note $|a|$.

Définition

Exemples

- $|-5| = 5$
- $|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{si } x \geq 5 \\ 5 - x, & \text{si } x < 5 \end{cases}$

Propriétés

Soit x et y deux nombres réels :

- $|x| \geq 0$
- $|-x| = |x|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x| \iff x = 0$
- $|x| = |y|$ $\iff \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = -y \end{cases}$
- $|xy| = |x| \times |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pour $y \neq 0$

Exemples

- $|-3| = 3$ et $|3| = 3$, donc $|-3| = |3|$
- $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ et $|-5| = 5$, donc $\sqrt{(-5)^2} = |-5|$

II.2 Distance et valeur absolue

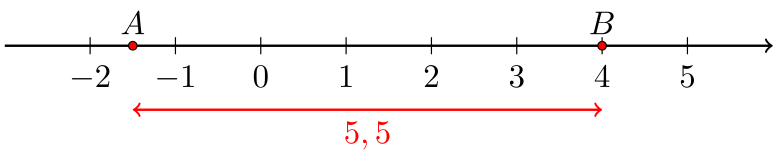
Propriété

Soit a et b deux nombres réels.
Sur une droite graduée, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives a et b est le nombre $|a - b|$.

Exemple

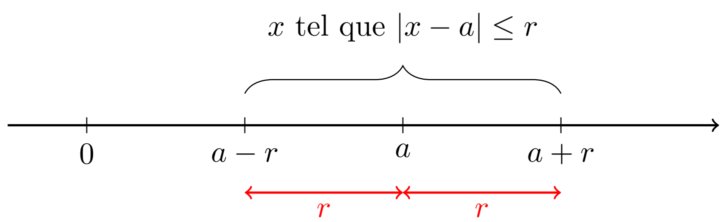
Calculer la distance entre les points A et B d'abscisses respectives $-1,5$ et 4 :

$$\text{dist}(-1,5;4) = \left|4 - (-1,5)\right| = |-1,5 - 4| = 5,5$$



Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$.
Dire qu'un réel x est tel que $|x - a| \leq r$ signifie que x appartient à l'intervalle $[r - a, r + a]$.



Exemple

Soit un réel x tel que $|x-5| \leq 2$.
Cela signifie que $x \in [5-2, 5+2]$ soit $x \in [3, 7]$.
Géométriquement, cela se traduit par le fait que la distance du point d'abscisse x au point d'abscisse 5 est inférieure ou égale à 2.