Version 210902

2021/2022

Notion de multiple, diviseur et nombre premier

I Notion de nombre premier

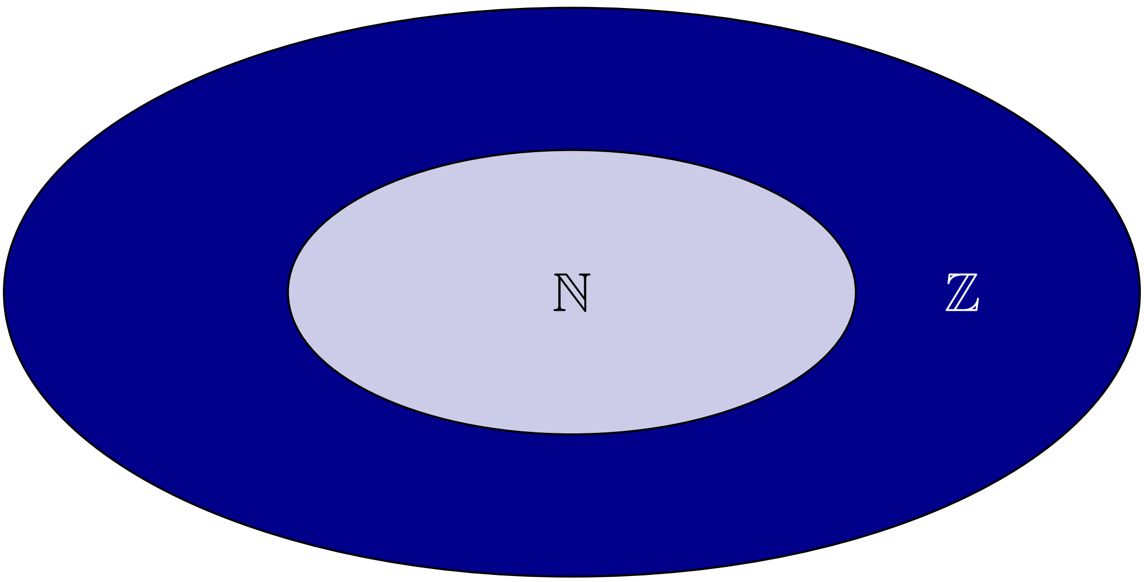
Un nombre **entier naturel** est un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$$

Un nombre **entier relatif** est un nombre entier qui positif ou négatif.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est notés $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

On a donc $\mathbb{N}$ qui est inclus dans $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.



II Notion de multiple et de diviseur

Définition

Soit a et b deux entiers.

- On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que $a = kb$.
- On dit alors que b est un **diviseur** de a.

Propriété

La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Démonstration

Montrons que la somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a :
Soit a un entier quelconque.
Soit b et c deux multiples de a.

- Comme b est un multiple de a, il existe un entier k_1 tel que $b = ak_1$.
- Comme c est un multiple de a, il existe un entier k_2 tel que $c = ak_2$.

Donc : $b + c = ak_1 + ak_2 = a(k_1 + k_2) = ak$ où $k = k_1 + k_2$.
Or : $k = k_1 + k_2$ est un entier car somme de deux entiers, donc $b + c = ak$ avec k entier.
On conclut : $b + c$ est donc un multiple de a.

III Nombres pairs et nombres impairs

Définitions

Nombre pair
un nombre pair est un multiple de 2.

Nombre impair
Un nombre impair est un nombre qui n'est pas pair.

Propriété

On a de façon générale :

- pair + pair $\to$ pair
- pair + impair $\to$ impair
- impair + impair $\to$ pair
- pair $\times$ nombrer $\to$ pair
- impair $\times$ pair $\to$ impair

Propriétés

- Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
- Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k + 1$, avec k entier.
- Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration

Montrons que la carré d'un nombre impair est impair :
Soit a est un nombre impair.
Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k + 1$, avec k entier.
Donc :

$$\begin{aligned} a^2 = (2k+1)^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2k' + 1 \text{ avec } k' = 2k^2 + 2k \end{aligned}$$

k' est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2 = 2k' + 1$ et donc a^2 est impair.

IV Rappels de collège sur les nombres premiers

Définition

Nombre premier
Un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemples

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Cette liste est infinie.

Le nombre 1 n'est pas entier car il n'a qu'un seul diviseur.

Définitions

Nombres premiers entre eux

On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

Fraction irréductible

On dit qu'une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Propriété

Tout nombre non premier peut se décomposer en produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Exemples

Décomposition en produit de facteurs premiers : $300 = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{5} \times \mathbf{5}$
$140 = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{5} \times \mathbf{7}$

Mise sous forme irréductible d'une fraction :
$\frac{300}{140} = \frac{2\times2\times3\times5\times5}{2\times2\times5\times7} = \frac{15}{7}$