METHODES ARITHMETIQUE

Résoudre un problème avec des multiples ou des diviseurs

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Soit trois entiers consécutifs qui peuvent donc s'écrire sous la forme : n, $n+1$ et $n+2$, où n est un entier quelconque.
Leur somme est :
$$S = n + (n+1) + (n+2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n+1)$$
Soit k l'entier tel que, k = n + 1.
Donc S = 3k, avec k entier.
On en déduit que S est un multiple 3.

Rendre une fraction irréductible

Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On a ainsi les décompositions de 60 et 126 :
$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \text{ et } 126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$
On a :
$$\frac{60}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$
10 et 21 sont premiers entre eux et donc : $\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.

Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Soit deux entiers consécutifs n et $n+1$. (*disjonction de cas*)

- ➔ Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$, avec k entier.
  Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
  $$\begin{aligned} n(n+1) &= 2k(2k+1) \\ &= 2k_1 \text{ avec } k_1 = k(2k+1) \text{ entier} \end{aligned}$$
  Donc $n(n+1)$ est pair.
- ➔ Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k+1$, avec k entier.
  Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
  $$\begin{aligned} n(n+1) &= (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) \\ &= 2k_2 \text{ avec } k_2 = (2k+1)(k+1) \text{ entier} \end{aligned}$$
  Donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.