

Exercice 1 :

Pierre possède une piscine naturelle de 80 000 litres d'eau. Des plantes épuratives jouent le rôle de filtration naturelle. Afin d'améliorer l'oxygénation de l'eau, Pierre décide de recycler en permanence une partie de l'eau de la piscine en la remplaçant par l'eau d'un puits voisin. Malheureusement, Pierre ne sait pas que l'eau du puits, captée par une pompe, est contaminée par des germes.

Avant la mise en route de la pompe, l'eau de la piscine n'est contaminée par aucun germe. La quantité d'eau contaminée au cours du temps est modélisée par une fonction f . Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis la mise en route de la pompe, $f(t)$ représente la quantité, en litres, d'eau contaminée venant du puits au bout de t heures de pompage.

On admet que la fonction f , définie sur $[0, +\infty[$, est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0,00625 y = 30.$$

1. a) Donner les solutions de cette équation différentielle sur $[0, +\infty[$.

b) Sachant que $f(0) = 0$, déterminer une expression de $f(t)$ pour tout réel t de $[0, +\infty[$.

Dans les questions suivantes, on admet que pour tout réel t de $[0, +\infty[$, on a :

$$f(t) = 4\,800 - 4\,800e^{-0,006\,25t}$$

2. Calculer, en litres, la quantité d'eau contaminée venant du puits au bout de 72 heures. Le résultat sera arrondi à l'unité.

3. a) Calculer $f'(t)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f (on admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 4\,800$).

c) Ce sens de variation de la fonction f déterminé est-il cohérent avec la situation concrète étudiée ?

Pourquoi ?

4. La piscine devient dangereuse pour la peau lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 6 % du volume d'eau de la piscine.

Cette piscine peut-elle être dangereuse pour la peau ? Justifier.

5. La piscine devient impropre à la baignade lorsque la quantité d'eau contaminée dépasse 3 % du volume d'eau de la piscine. Déterminer, à l'heure près, au bout de combien de temps l'eau de la piscine deviendra impropre à la baignade.

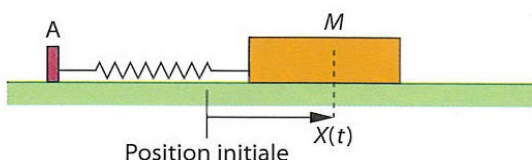
Exercice 2 :

On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet M , qui peut coulisser sans frottement sur un plan. Le point A, où est accrochée l'autre extrémité du ressort, est fixe.

Après avoir été écarté de sa position d'équilibre, l'objet est lâché avec une vitesse initiale.

On repère l'objet par son abscisse X qui est fonction du temps t et qui mesure l'écart entre la position à un instant t et sa position initiale.

On admet qu'à un instant t , la fonction X est solution de l'équation différentielle (E) : $X'' + 100X = 0$.



1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'expression de la solution particulière X de (E) qui vérifie les conditions initiales : $X(0) = 10^{-1}$ et $X'(0) = 1$.

3.

► Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Vérifier que, pour tout nombre réel t de $[0, +\infty[$

$$X(t) = 10^{-1} \sqrt{2} \sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Vérifier que l'énergie mécanique W du système, définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$W(t) = 10^{-1}[X'(t)]^2 + 10[X(t)]^2, \text{ est constante.}$$

5. Déterminer la valeur moyenne de la fonction X sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{10}\right]$.

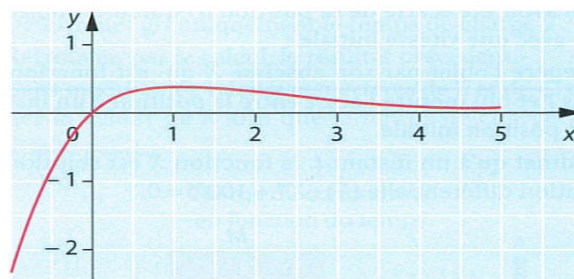
Exercice 3 :

L'exercice suivant est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chaque proposition, choisir l'unique bonne réponse, sachant qu'une bonne réponse rapporte un point et que l'absence de réponse ou une réponse fausse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Aucune justification n'est demandée.

A. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

La courbe représentative de f est tracée dans le repère ci-dessous :



1. Pour tout réel x , $f'(x)$ est égal à :

- a) $-e^{-x}$; b) e^{-x} ; c) $(1-x)e^{-x}$.

2. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

- a) $y = x$; b) $y = 2x$; c) $y = -x$.

3. Une primitive F de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$;

b) $F(x) = -(1+x)e^{-x}$;

c) $F(x) = -xe^{-x}$.

4. La valeur de $\int_0^2 f(x)dx$ est :

- a) négative ; b) inférieure à 1 ; c) supérieure à 3.

B. 1. Dans ce qui suit, C est une constante quelconque.

L'équation différentielle (E) : $2y' + y = 1$ a pour solutions :

- a) $x \mapsto C e^{-2x} - 1$; b) $x \mapsto C e^{-\frac{1}{2}x} + 1$; c) $x \mapsto C e^{-\frac{1}{2}x} - 1$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{1}{3}x + \sin \frac{1}{3}x.$$

f est une solution de l'équation différentielle (E) :

- a) $9y'' + y = 0$; b) $y'' + \frac{1}{3}y = 0$; c) $y'' + 9y = 0$.