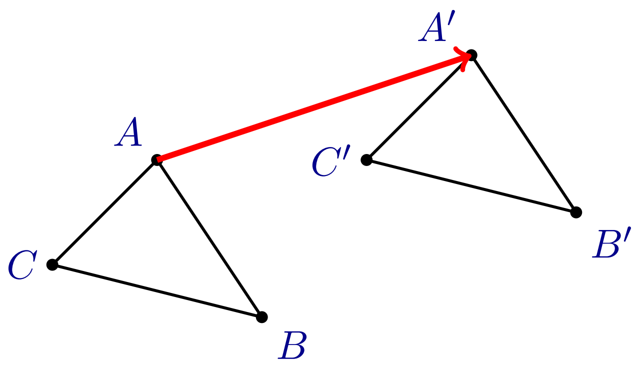
2021/2022

LES VECTEURS

I Rappel de collège : la translation

Une translation est un glissement caractérisé par :

- Une **direction** donnée : la droite (AA')
- Un **sens** donné (De A vers A')
- Une **longueur** donnée (Celle de AA')

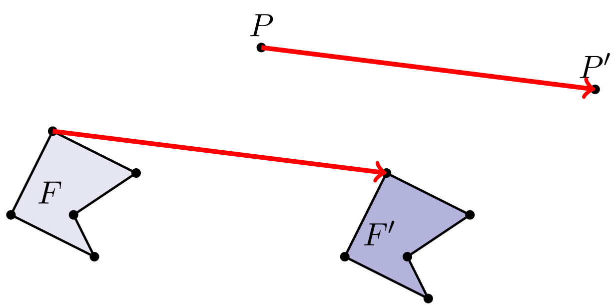


On dit que le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme A en A'.

Définition

Soit P et P' deux points distincts du plan.
On appelle translation qui envoie P sur P' la transformation dont l'image F' d'une figure F est obtenue en faisant glisser la figure F :

- selon la direction de la droite (PP'),
- dans le sens de P vers P',
- d'une longueur égale à PP'.



Remarque

Une translation est une **isométrie** du plan, c'est à dire qu'elle conserve :

- les longueurs
- et les angles.

Cette caractérisation peut être utile pour simplifier la construction de l'image de certaine figures.

II Les vecteurs

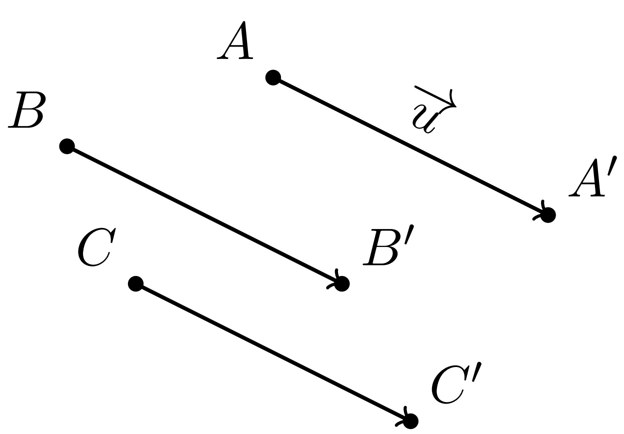
II.1 Définition

Définition

Soit t la translation qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.
Les couples de points $(A; A')$, $(B; B')$ et $(C; C')$ définissent un vecteur caractérisé par :

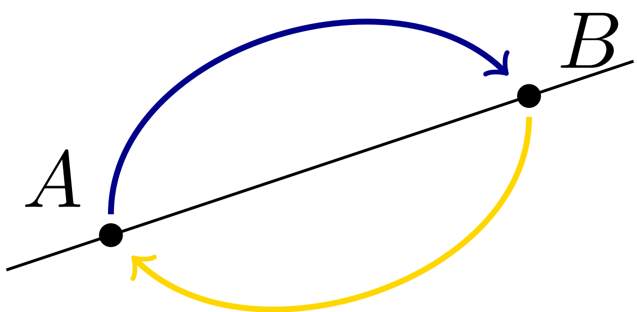
- une direction : celle de la droite (AA'),
- un sens : de A vers A',
- une longueur : la longueur AA'. (Aussi appelée norme du vecteur).

On note $\overrightarrow{u}$ ce vecteur et on écrit : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'}$.
On dit que $\overrightarrow{AA'}$ est un **représentant** de $\overrightarrow{u}$.
$\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont également des représentants de $\overrightarrow{u}$.



II.2 Vecteurs opposés, égalité de vecteurs et vecteur nul

Une droite définit une direction, ci-dessous la direction de la droite (AB).
Cependant une direction possède deux sens, ici de **"A vers B"** ou de **"B vers A"**.



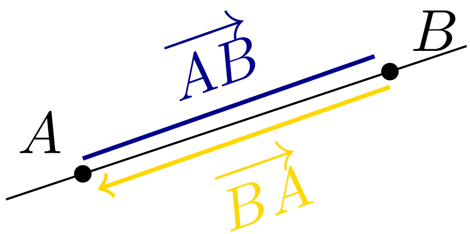
Définition

Opposés
Deux vecteurs sont **opposés** lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur et qu'ils sont de sens contraire.

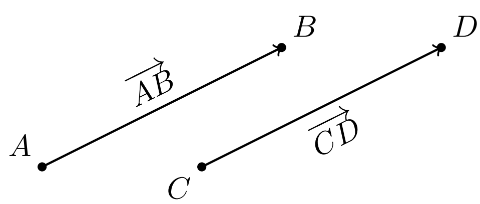
Égaux
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Vecteur nul
Un vecteur est **nul** lorsque les points A et B sont confondus.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.
On note $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



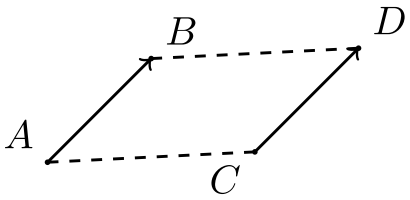
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des vecteurs égaux.
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

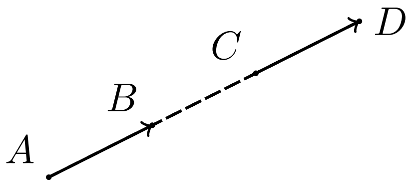


Si A et B sont confondus, $\overrightarrow{AB}$ est nul, on note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

Propriété

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.
Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux revient à dire que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.





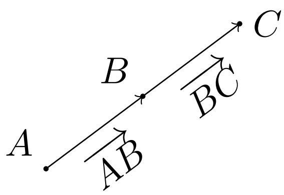
Démonstration

$\Longrightarrow$ Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors la translation de vecteur transforme le point C en D. Les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont donc même longueur et même direction.
Le quadrilatère non croisé $ABDC$ est donc un parallélogramme éventuellement aplati. (Vu au collège).

$\Longleftarrow$ Réciproquement : Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même longueur donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, défini à l'aide des segments $[AB]$ et $[CD]$ d'un parallélogramme $ABDC$, sont égaux.

Propriété

Dire que B est le milieu du segment $[AC]$ revient à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux.



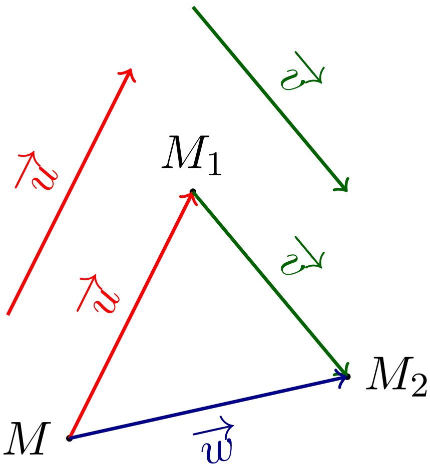
III Somme de vecteurs

Propriété

La composée (ou l'enchaînement) de deux translations est une translation.

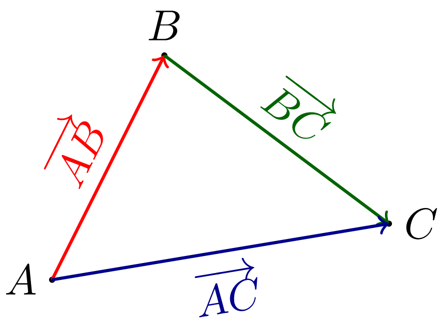
Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle **somme** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, (notée $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$), le vecteur $\overrightarrow{w}$ correspondant à la translation composée des translations de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.



III.1 La relation de Chasles

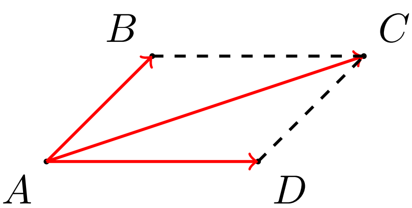
Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



III.2 Conséquence de le relation Chasles

Propriété

Dire que $ABCD$ est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$



Démonstration

D'après la relation de Chasles, l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ peut s'écrire :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, (direction et longueur égales $\Longrightarrow$ $ABCD$ parallélogramme)
Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

III.3 Différence de deux vecteurs

Définition

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle **différence** du vecteur $\overrightarrow{u}$ avec le vecteur $\overrightarrow{v}$, le vecteur noté $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, tel que :

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$$