Version 220511

2021/2022

Probabilités

I Expérience aléatoire

Exemple

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure, pile ou face.
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points sur la face supérieure.
- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde la couleur du secteur marqué par la flèche.

Expérience aléatoire (Définition)

Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats **(ou issues)** possibles et que l'on ne peut à priori pas prévoir le résultat. L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire s'appelle **l'univers**.

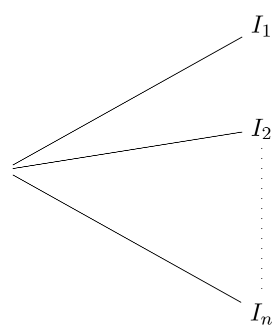
Exemple

Expérience : Lancé de dé
Exemple d'issue : 3
Univers = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

II Probabilité d'événement

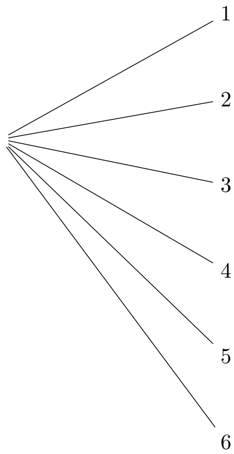
Arbre de probabilité (Définition)

Un arbre de probabilité permet de visualiser les issues $\{I_1, ..., I_n\}$ d'une expérience aléatoire.



Exemple

Voici l'arbre de probabilité correspondant au lancé de dé :



Définition

Les fréquences d'apparition obtenues pour un événement E se rapprochent d'une fréquence théorique lorsque le nombre de répétition de l'expérience est suffisamment grand (Loi des grands nombres).
Cette valeur s'appelle **la probabilité** de l'événement E.

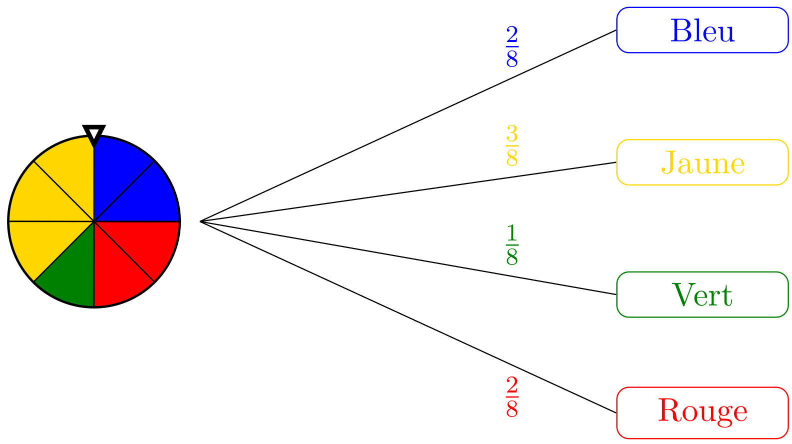
Remarque

En cas **d'équiprobabilité**, c'est à dire si chacune des issues a la même probabilité d'être obtenue, la probabilité est donnée par :

$$P(E) = \frac{\text{nombre d'issues favorables pour E}}{\text{nombre d'issues total}}$$

Exemple

On considère l'expérience aléatoire de la roue avec 2 secteurs de couleur bleue, 3 de couleur jaune, 1 de couleur verte et 2 de couleur rouge.
Il y a donc 2 chances sur 8 d'obtenir un secteur de couleur bleue. On dit que la probabilité d'obtenir un secteur bleu est égale à $\frac{2}{8}$ soit alors $\frac{1}{4}$
On inscrit sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues :



Événement
Un événement est un ensemble d'issues d'une même expérience aléatoire.

Événement contraire
L'événement contraire de E, noté $\overline{E}$, est l'événement constitué de toute les issues qui ne réalisent pas E.

Événement élémentaire
Un événement élémentaire est un évènement n'étant réalisé que par une seule issue. On appelle un ensemble à un seul élément un singleton.

Définition

Exemple

On reprend l'exemple précédent.

- **L'événement** A : " Avoir une couleur qui est sur exactement 2 secteurs " est réalisé par deux issues : **bleu** ou **rouge**.
  Donc $A = \{\textbf{bleu}, \textbf{rouge}\}$
  $P(A) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$
- L'événement contraire de A est $\overline{A}$: " Avoir une couleur qui n'est pas uniquement sur 2 secteurs".
  $\overline{A} = \{\text{Jaune}, \textbf{vert}\}$.
- L'événement B : " La roue s'arrête sur un secteur bleu. " n'est réalisé que par l'issue **bleu**. C'est donc **un événement élémentaire**.

Probabilités
La probabilité $P(E)$ d'un événement E est telle : $0 \leq P(E) \leq 1$.

Somme de probabilités
On a toujours :

- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

probabilité événement contraire
La probabilité de l'événement contraire d'un événement E est : $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

Propriété

Exemple

On reprend les événements de l'exemple précédent :
La somme des événements élémentaires est : $\frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{8}{8} = 1$
et $P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{8}{8} - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{2}$.

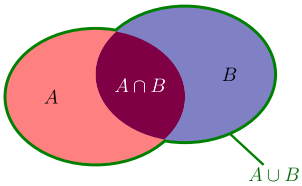
L'ensemble des probabilités des événements élémentaires $\{E_1, ..., E_n\}$ notées, $\{P_1, ..., P_n\}$ d'une expérience aléatoire est appelée **la loi de probabilité**.

Définition

III Réunion et intersection d'événements

Définition

- L'événement "A et B", noté $A \cap B$, est réalisé lorsque les deux événements A et B sont simultanément réalisés.
- L'événement "A ou B", noté $A \cup B$, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.



- On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
On considère les événements suivants :
A : " On tire une dame "
B : " On tire un cœur ou un carreau "
C : " On tire un valet ".

- L'intersection des événements A et B est l'événement : « On tire la dame de cœur ou la dame de carreau ». On note cet événement $A \cap B$ et on lit « A inter B »
- La réunion des événements A et B est l'événement : « On tire la dame de piques, la dame de trèfle, un cœur ou un carreau ». On note cet événement $A \cup B$ et on lit « A union B »
- L'intersection des événements A et C est l'événement : « On tire une dame et un valet ». C'est un événement impossible. $A \cap C = \emptyset$

Théorème

Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\longrightarrow$ Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
On considère les événements suivants :
A : " On tire un valet "
B : " On tire un roi "
C : "On tire un coeur "

- Les deux événements A et B sont incompatibles, en effet $A \cap B = \emptyset$.
  On en déduit que la probabilité de l'événement « Tirer un valet ou un roi » est égale à : $P(A \cup B) = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} = \frac{1}{4}$
- L'intersection de A et C correspond à : " Tirer le valet de coeur " .
  Donc $P(A \cup C) = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{7}{32}$