Version 220218

2021/2022

Inéquations

I Tableau de signes d'une fonction affine

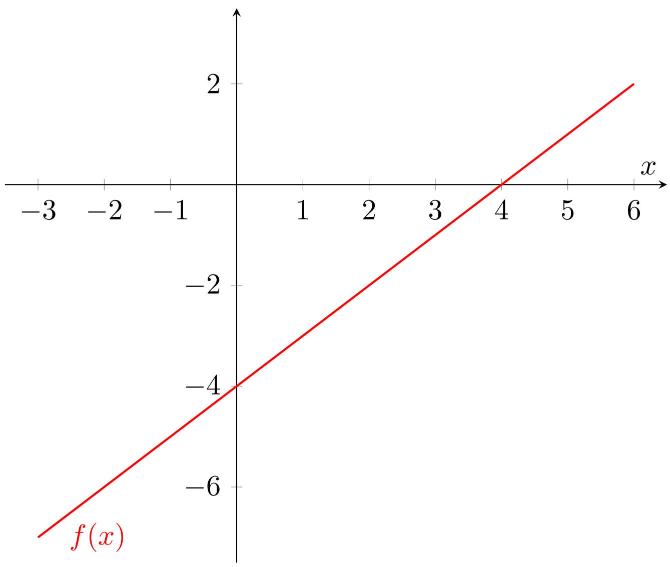
Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 4$.
Ci-dessous, nous avons complété un tableau donnant la valeur de l'image de plusieurs valeurs de x par f.

x	-15	-5	0	4	5	10	15
$f(x)$	-19	-9	-4	0	1	6	11

La fonction f est une fonction affine, sa représentation graphique est donc une droite coupant l'axe des abscisses en $x = 4$.

Voici la droite représentative de la fonction f.



On en déduit que toutes les valeurs des images pour des $x > 4$ par f seront strictement positives.
D'où le tableau suivant :

x	-15	-5	0	4	5	10	15
$f(x)$		$-$		0		$+$	

Exemple

Construire le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 6$.

Remarque

De façon plus général prenons une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$, tel que $f(x) = mx + p$ avec m et p deux nombres réels quelconques avec m non nul.
Déterminons l'abscisse x du point d'intersection de la droite représentative de f dans un repère avec l'axe des abscisses :
Cela revient à résoudre l'équation : $f(x) = 0$,
soit : $mx + p = 0$,
soit : $mx = -p$,
Finalement : $x = \frac{-p}{m}$

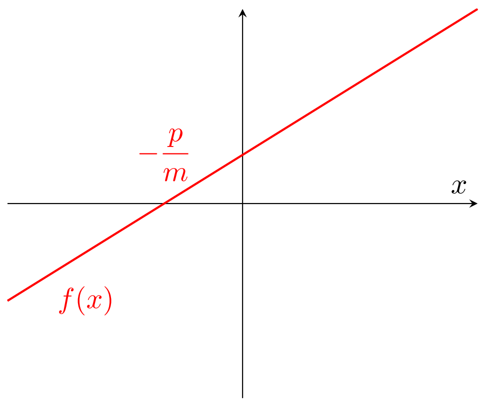
La fonction f coupe donc l'axe des abscisses au point $M(\frac{-p}{m}, 0)$.

Définition

Pour une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto mx + p$ avec m et p deux réels quelconques, m non nul, le tableau de signe de f dépendra du signe de m.

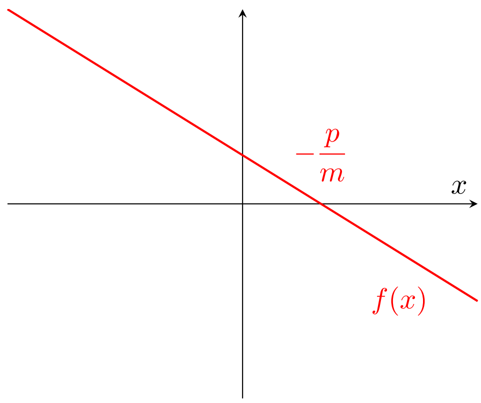
<u>Si m>0 :</u>

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	



<u>Si m<0 :</u>

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	



II Résolution d'inéquations

Définition

Une **inéquation** est une inégalité qui contient une inconnue x. Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs. La solution se présente la plupart du temps sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

Règles de résolution d'une inéquation :

a. Additionner ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inéquation conserve le sens de cette inéquation.
b. Multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un même nombre strictement positif conserve le sens de cette inéquation.
c. Multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un même nombre strictement négatif inverse le sens de cette inéquation.

Remarque

Voici 3 exemples d'inéquations que vous pouvez rencontrer cette année :

a. Inéquation du premier degré

Par exemple : $3x+2 \leq 7x+1$

$$\begin{aligned}
&\iff 3x+2 \leq 7x+1\\
&\iff 3x-7x \leq 1-3\\
&\iff -4x \leq -2\\
&\iff x \geq \frac{-2}{-4}\\
&\iff x \geq \frac{2}{4}\\
&\iff x \geq \frac{1}{2}\\
&S = [\frac{1}{2};+\infty[
\end{aligned}$$

Ou $4(x+2) \geq 2x+1$

$$\begin{aligned}
&\iff 4(x+2) \geq 2x+1\\
&\iff 4x+8 \geq 2x+1\\
&\iff 4x-2x \geq 1-8\\
&\iff 2x \geq -7\\
&\iff x \geq \frac{-7}{2}\\
&S = [\frac{-7}{2};+\infty[
\end{aligned}$$

Quand on divise ou on multiplie par une nombre négatif, il faut penser à changer le sens de l'inégalite !

b. Inéquations produit

Pour étudier le signe d'un produit, il faut commencer par chercher les **racines** des facteurs. On étudie ensuite le signe de chacun des facteurs à l'aide du signe de m.
Par exemple : $(3x+2)(7x+1) \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\iff 3x+2=0 \text{ et } 7x+1=0\\
&\iff 3x=-2 \text{ et } 7x=-1\\
&\iff x=\frac{-2}{3} \text{ et } x=\frac{-1}{7}
\end{aligned}$$

Pour étudier le signe du produit, on va s'aider d'un **tableau de signe** :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{7}$		$+\infty$
$(3x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(7x+1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x+2)(7x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit donc que l'ensemble des solutions est une réunion d'intervalles :$S =]-\infty;\frac{-2}{3}] \cup [\frac{-1}{7};+\infty[$

c. Inéquations quotient

Pour étudier le signe d'un quotient, il faut conserver la même méthode en recherchant les racines de chacun des termes.

Il faudra penser à exclure la valeur de x qui annule le dénominateur. Le quotient n'est pas défini pour cette valeur. On recherche alors le domaine de définition de la fraction étudiée

Par exemple : $\frac{(4x+3)}{5x+1} \leq 0$

$$\begin{aligned} & 4x+3=0 \text{ et } 5x+1=0 \\ \iff & 4x=-3 \text{ et } 5x=-1 \\ \iff & x=\frac{-3}{4} \text{ et } x=\frac{-1}{5} \end{aligned}$$

L'étude se fait donc pour $x \neq -\dfrac{1}{5}$. L'utilisation de $||$ dans le tableau, signifie que le quotient n'est pas défini pour cette valeur de x.

Pour étudier le signe du quotient, on va s'aider d'un **tableau de signe** :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
$(4x+3)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(5x+1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{4x+3}{5x+1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

On en déduit donc l'intervalle solution de l'inéquation : $S = [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{5}[$