Version 220301

2021/2022

Fonctions de référence

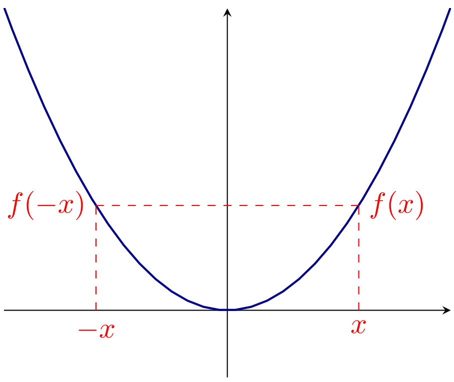
I Fonction paire et fonction impaire

Fonction paire
Une fonction f est paire lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D, $-x$ appartient à D et $f(-x) = f(x)$.

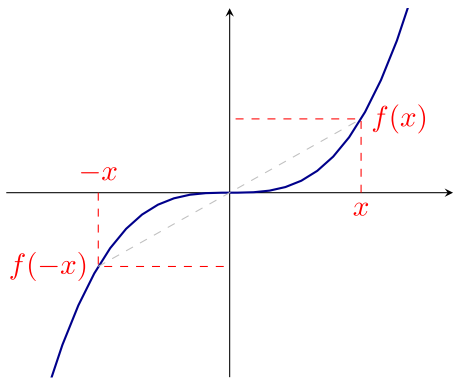
Fonction impaire
Une fonction f est impaire lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D, $-x$ appartient à D et $f(-x) = -f(x)$.

Définitions

Toute courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie dans un repère orthogonal.



Toute courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine pour centre de symétrie dans un repère orthogonal.



II La fonction carré

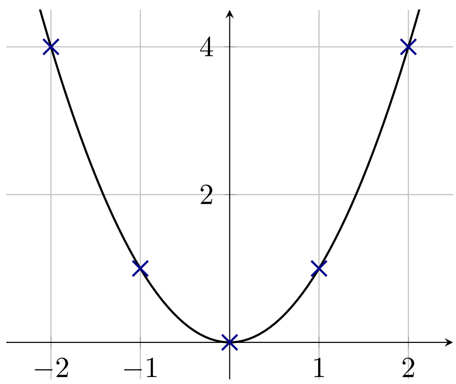
La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Définition

- La représentation graphique dans un repère (O, I, J) de la fonction carré est une **parabole** de sommet O.
- Si ce repère est orthogonal, la courbe admet un **axe de symétrie** : l'axe des ordonnées, **la fonction carré est paire**.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	2	0	1	4



III Fonction inverse

Définition

La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$:

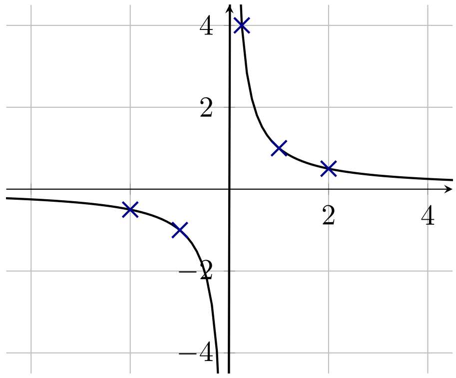
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ désigne l'ensemble des réels privé de 0, c'est à dire :

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

- La représentation graphique dans un repère (O, I, J) de la fonction inverse est une **hyperbole** de centre O.
- Si ce repère est orthogonal, la courbe admet un **centre de symétrie** : le point O, **la fonction inverse est impaire**.

x	-2	-1	0.25	1	2
$f(x)$	$-0,5$	-1	4	1	0.5



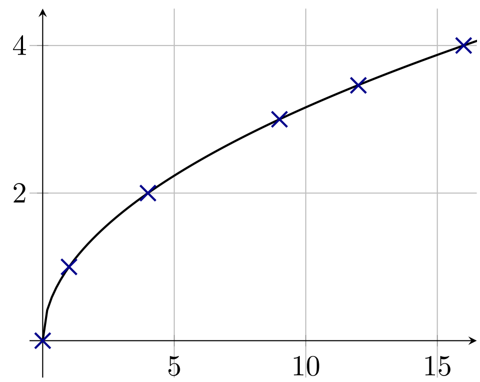
IV La fonction racine carrée

Définition

La fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ (cette fonction n'est pas définie pour $x < 0$) :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

x	0	1	4	9	12	16
$f(x)$	0	1	2	3	$2\sqrt{3}$	4



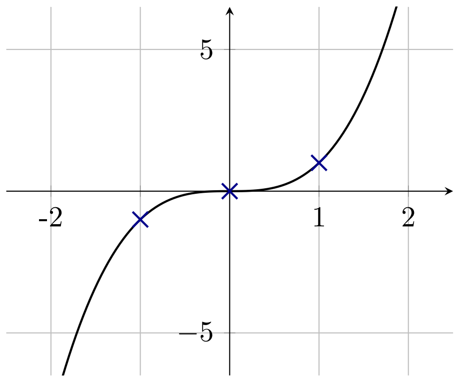
V Fonction cube

Définition

La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

- La courbe de la fonction cube est symétrique par rapport au centre du repère. **La fonction cube est donc impaire**.

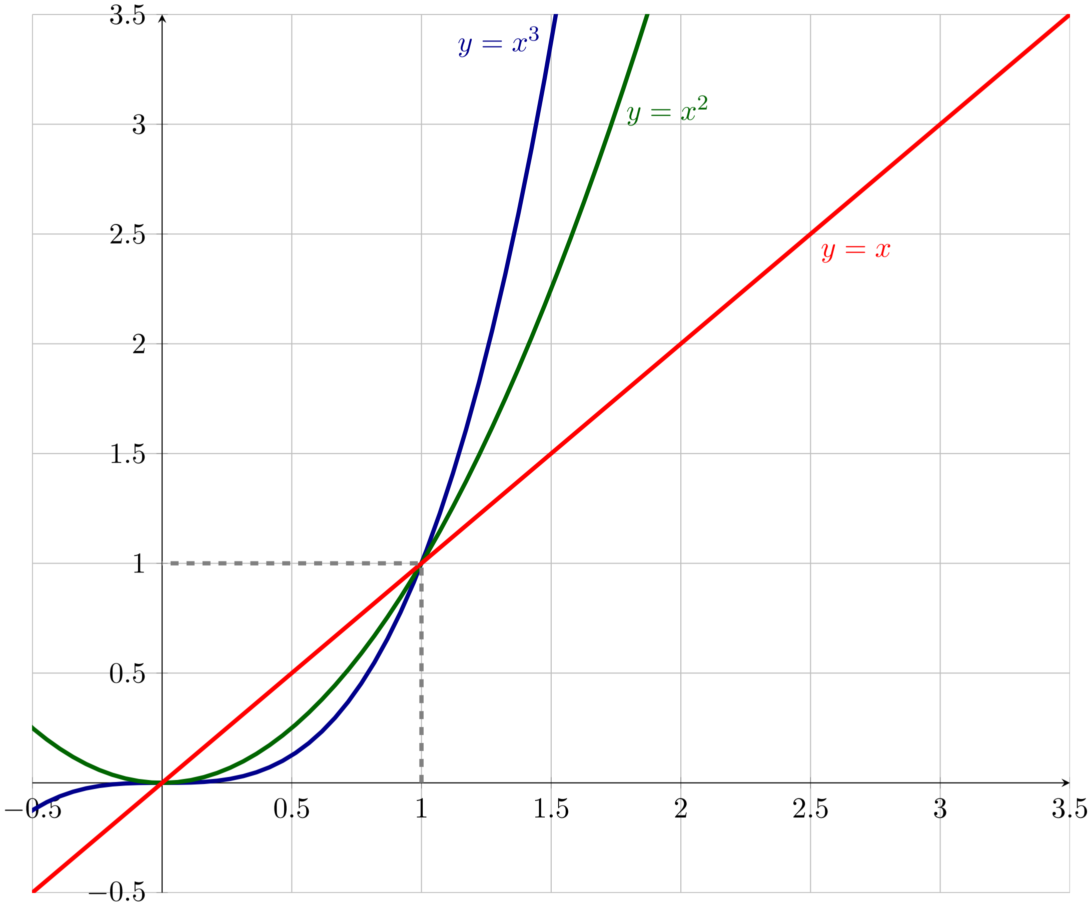


x	-3	-1	0	1	5
$f(x)$	-27	-1	0	1	125

VI Étude des positions relatives des courbes précédentes pour $x > 0$

- Si $x \geq 1$: la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$ qui se trouve elle-même au-dessus de la courbe d'équation $\frac{1}{x}$.

- Si $x < 1$: l'ordre précèdent est inversé.



Démonstration

La courbe représentative de la fonction f d'équation $y = f(x)$ est au dessus de la courbe représentative de g d'équation $y = g(x)$ si $f(x) \geq g(x)$. On peut donc étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour connaître la position relative des deux courbes.
On a $x^2 - x = x(x-1)$

x	0		1		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$	0	$-$	0	$+$	

Donc, la fonction carrée se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x$ sur $[1; +\infty[$ et en dessous sur l'intervalle $[0; 1]$.

On a $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$

x	0		1		$+\infty$
x^2	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$	0	$-$	0	$+$	

La fonction cube est au dessus de la fonction carrée sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et en dessous sur $[0; 1]$.